مباحثی در گروه‌های جایگشتی، نظریه جبری و توپولوژی گراف

دکتر محسن قاسمی

انتشارات دانشگاه ارومیه

سرشناسه	:	قاسمی، محسن، ۱۳۵۷ شهریور-
عنوان و نام پدیدآور:		مباحثی در گروه های جایگشتی، نظریه جبری و توپولوژی گراف/ گردآورنده محسن قاسمی ؛ ویراستار علمی علی سربازجانفدا.
مشخصات نشر	:	ارومیه: دانشگاه ارومیه، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهری	:	۳۶۹ ص.: مصور، جدول.
فروست	:	انتشارات دانشگاه ارومیه؛ ۲۹۴
شابک	:	978-600-8681-84-7
وضعیت فهرست نویسی:		فیپا
یادداشت	:	واژه‌نامه.
یادداشت	:	کتابنامه: ص. ۳۳۹-۳۳۶.
یادداشت	:	نمایه.
موضوع	:	گروه‌های جایگشتی (Permutation Groups)
موضوع	:	نظریه جبری گراف (Algebraic Graph Theory)
موضوع	:	نظریه توپولوژی جبری (Topological Graph Theory)
شناسه افزوده	:	سرباز جانفدا، علی، ۱۳۳۹ -، ویراستار
شناسه افزوده	:	دانشگاه ارومیه
رده بندی کنگره	:	QA۱۷۵
رده بندی دیویی	:	۲۱/۵۱۲
شماره کتابشناسی ملی:		۷۵۶۵۴۳۹

مرکز انتشارات دانشگاه ارومیه

ارومیه، کیلومتر ۱۱ جاده سرو، صندوق تلفن: ۳۱۹۴۲۲۷۴ -۳۲۷۷۹۹۳۰ -۰۴۴، دورنگار ۳۲۷۷۹۹۳۰

عنوان: مباحثی در گروههای جایگشتی، نظریه جبری و توپولوژی گراف

گردآورنده: محسن قاسمی

ناشر: انتشارات دانشگاه ارومیه

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: قم، نشر هم میهن۰۹۱۰۲۸۰۷۰۲۱

نوبت چاپ: اول

سال چاپ:۱۴۰۰

شمارگان: ۲۰۰ نسخه

قیمت پشت جلد:۸۰۰۰۰۰ ریال

شابک: ۷-۸۴-۸۶۸۱-۶۰۰-۹۷۸

پیشگفتار

جبر شاخه‌ای از علم ریاضیات است که به مطالعهٔ ساختار و کمیت می‌پردازد. در جبر از نشانه‌ها و معادلات برای نشان دادن ارتباط بین مفاهیم جبری استفاده می‌شود.

یکی از زیر شاخه‌های مهم جبر، گروه‌های جایگشتی است که مطالعهٔ آن‌ها به نخستین سال‌های سده نوزدهم برمی‌گردد. در واقع، مدت‌ها منظور از گروه، گروه جایگشتی بود. گرچه تلقی امروزه چنین نیست ولی گروه‌های جایگشتی نقش مهمی را از طریق عمل گروه (بر مجموعه‌ها) در نظریهٔ نوین گروه‌ها ایفا می‌کنند.

نظریهٔ گراف شاخه‌ای دیگری از ریاضیات است که دربارهٔ گراف بحث می‌کند. این مبحث در واقع شاخه‌ای از توپولوژی است که با جبر و نظریهٔ ماتریس‌ها پیوند متسحکم و تنگاتنگی دارد. نظریهٔ گراف نقطهٔ آغاز مشخصی دارد و آن انتشار مقاله‌ای از لئونارد اویلر ریاضیدان سوئیسی، برای حل مسئلهٔ پل‌های کوینگبرگ در سال ۱۷۳۶ بوده است. پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات به ویژه در کاربردهای آن موجب گسترش چشم‌گیر نظریهٔ گراف شده و در نهایت با به کارگیری علم جبر، شاخه‌ای به نام نظریهٔ جبری گراف بنیان‌گذاری شده است، به گونه‌ای که هم اکنون ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند نظریهٔ کدگذاری، تحقیق در عملیات، شیمی، بلورشناسی و سایر زمینه‌ها گردیده است.

یکی از مباحث مهم در نظریهٔ جبری گراف که اخیراً مورد توجه بسیاری از محقیقان بوده، بررسی خواص تقارنی گراف است که بیانگر رابطهٔ بین نظریهٔ گروه‌های جایگشتی و نظریه گراف است. این مبحث از نظریهٔ جبری گراف دارای کاربرد بسیار زیادی در علوم مختلف از جمله علوم کامپیوتر و بررسی امنیت شبکه‌ها دارد. همین دلایل به همراه عدم وجود کتاب به زبان فارسی در این زمینه کافی بود که نویسنده را ترغیب و تشویق به نوشتن کتاب حاضر کند. در پنج فصل اول کتاب سعی بر آن شده است تا نتایج و تعاریفی از گروه‌های جایگشتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان شوند. شش فصل آخر مربوط به نظریهٔ جبری و توپولوژی گراف است.

با وجود تمام تلاشی که نویسنده در این راه نمود، به یقین برخی از واژه‌ها به علت بیش از حد تخصصی بودن، خوب ادا نشده‌اند که از این بابت از تمام خوانندگان گرامی عذرخواهی نموده و درخواست می‌نماید که به نویسنده منت نهاده و برگردان صحیح آن‌ها را اطلاع دهند تا در صورت علاقهٔ خوانندگان و تجدید چاپ کتاب، آن‌ها را مورد استفاده قرار دهد.

آن چه مسلم است این است که هیچ اثری عاری از خطا و اشتباه نخواهد بود، به خصوص این که کار گردآوری کتاب با مشغلهٔ سنگین کاری اینجانب همراه بوده است. از این رو، این مجموعه نیز حتماً اشتباهاتی دارد که باید تصحیح شوند. موجب امتنان خواهد بود که استادان

بزرگوار و دانشجویان عزیز نظرات و پیشنهادات سازندهٔ خود را از طریق پست‌های الکترونیکی math.ghasemi@gmail.com و m.ghasemi@urmia.ac.ir و یا از هر طریق ممکن با اینجانب در میان بگذارند.

از همسر و پسر عزیزم که در طول مدت زمان نسبتاً طولانی تدوین کتاب، صبورانه یاری‌ام دادند، به صورت ویژه و صمیمانه سپاسگزارم.

هم چنین مؤلف لازم می‌داند مراتب امتنان خود را از سرکار خانم دکتر فرناز سلیمانی که حروف‌چینی کتاب را با حوصلهٔ فراوان انجام داده‌اند، ابراز دارد.

در پایان امیدوارم این مجموعه سرآغازی بر کارهای علمی و تحقیقاتی دیگر برای اینجانب و مرجع مناسبی برای دانشجویان گرامی و علاقمندان در حوزهٔ نظریه جبری و توپولوژی گراف باشد.

دکتر محسن قاسمی، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه ارومیه

تقدیم به:

همسر مهربان و

فرزند دلبندم ارسان

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروه‌ها، گراف‌ها و توپولوژی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه گروه‌ها

در این فصل برخی نمادها، تعاریف و نتایجی از گروه‌های متناهی، گراف‌ها و نظریهٔ توپولوژی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند، مرور و بیان می‌کنیم. نتایج بیان شده بدون اثبات هستند و علاقمندان برای دیدن اثبات آن‌ها می‌توانند به کتاب‌های مربوطه در مورد نظریه گروه‌ها، گراف و توپولوژی مراجعه کنند. هم‌چنین فرض بر این است که خواننده با مفاهیم و نتایج بنیادی نظریهٔ گروه‌ها، گراف‌ها و توپولوژی آشنایی دارد.

فرض کنیم G یک گروه باشد. عضو خنثی G را با ۱ نشان خواهیم داد. اگر G متناهی باشد آن‌گاه تعداد اعضای G را با $|G|$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین اگر x عضوی از گروه G با مرتبه متناهی باشد آن‌گاه مرتبه x را با $o(x)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم p یک عدد اول و G یک گروه باشد. در این‌صورت مرتبهٔ هر عضو نابدیهی G توان مثبتی از عدد اول p باشد آن‌گاه G را یک pـ گروه می‌نامیم. فرض کنیم G یک pـ گروه آبلی متناهی باشد به‌طوری‌که مرتبه هر عضو نابدیهی آن برابر با p باشد. در این‌صورت G را یک pـ گروه آبلی مقدماتی می‌نامیم.

لم ۱.۱. ***(لم کوشی).*** فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p \mid |G|$. در این‌صورت G

عضوی از مرتبه p دارد.

اگر U زیرگروه G باشد آن‌گاه می‌نویسیم $U \leq G$. هم‌چنین اگر U زیرگروه محض G باشد از نماد $U < G$ استفاده می‌کنیم. زیرگروه U از G را خودنرمالگر گوییم هرگاه $\mathrm{N_G}(U) = U$. از نماد $|G : U|$ برای نشان دادن اندیس U در G استفاده می‌کنیم و از نماد $U \lhd G$ برای بیان این‌که U زیرگروه نرمال G می‌باشد، استفاده می‌کنیم. U را زیرگروه مشخصه G گوییم و می‌نویسیم $U \operatorname{ch} G$ هرگاه برای هر خودریختی G مانند Φ، $U^{\Phi} = U$. اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گفته و با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم. S را یک بخش از گروه G گوییم هرگاه زیرگروه‌هایی از G مانند H و K وجود داشته باشند به طوری‌که $K \lhd H$ و $S \cong \frac{H}{K}$. کوچکترین زیرگروه نرمال و یکتای G مانند N را به‌طوری‌که $\dfrac{G}{N}$ یک pـ گروه است را با نماد $O^p(G)$ نمایش می‌دهیم.

نمای گروه G کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت m است به‌طوری‌که برای هر عضو g از G، $g^m = ۱$. اگر g و h دو عضو گروه G باشند آن‌گاه مزدوج g تحت h را با نماد g^h نشان می‌دهیم. هم‌چنین جابه‌جاگر g و h را با نماد $[g, h]$ نمایش می‌دهیم. در این‌جا $[g, h] = g^{-۱}h^{-۱}gh$.

فرض کنیم U و V دو زیرگروه G باشند. در این‌صورت

$$|UV| = \frac{|U||V|}{|U \cap V|} \text{ و } |G : U \cap V| \leq |G : U||G : V|.$$

اگر $(|G : U|, |G : V|) = ۱$ آن‌گاه $|G : U \cap V| = |G : U||G : V|$. به‌علاوه، $[U, V] = \langle [u, v] \mid u \in U, v \in V \rangle$. در حالتی که $U = V = G$، زیرگروه $[G, G]$ را زیرگروه مشتق G گویند و آن‌را با G' نشان می‌دهند. هم‌چنین به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم $G^{(i)} = [G^{(i-۱)}, G^{(i-۱)}]$ به طوری‌که $i \geq ۱$.

فرض کنیم G یک گروه باشد. هر دنبالهٔ صعودی از زیرگروه‌های G مانند $\{G_i\}_{i=۱}^{r}$ را که در آن $G_۰ = ۱$ و $G_r = G$ یک سری گویند و آن‌را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$(\star) \quad G_۰ = \{۱\} \leq G_۱ \leq G_۲ \leq \ldots \leq G_r = G$$

سری $(\star)$ را نرمال گوییم هرگاه هر جملهٔ آن در G نرمال باشد و آن‌را زیرنرمال گوییم هرگاه به ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$، $G_{i-۱} \lhd G_i$. سری $(\star)$ را یک سری ترکیبی G گوییم هرگاه یک سری زیرنرمال باشد و به ازای هر i طبیعی که $۱ \leq i \leq r$، $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ یک گروه ساده (غیربدیهی) باشد. در سری ترکیبی فوق هر گروه خارج‌قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ را یک عامل ترکیبی می‌نامند. زیرگروه H از G را یک زیرگروه زیرنرمال G گوییم هرگاه H جمله‌ای از یک سری زیرنرمال G باشد.

گروه G را حل‌پذیر گوییم در صورتی که دارای یک سری زیرنرمال با عامل‌های آبلی باشد. فرض کنیم گروه G یک سری نرمال مانند $(\star)$ داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$، $[G, G_i] \leq G_{i-۱}$. در این‌صورت G را پوچ‌توان می‌گوییم. اگر G پوچ‌توان باشد آن‌گاه طول کوتاه‌ترین سری مانند $(\star)$ را که در شرط $[G, G_i] \leq G_{i-۱}$ $(۰ \leq i \leq r)$ صدق می‌کند، ردهٔ پوچ‌توانی G می‌نامند. هر گروه آبلی و هر pـ گروه متناهی یک گروه پوچ‌توان است.

قضیه ۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(i) G پوچ‌توان است؛

(ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(iii) هر زیرگروه سیلوی G نرمال است؛

(iv) هر دو عضو G که مرتبهٔ آن‌ها نسبت به هم اول هستند، جابه‌جا می‌شوند؛

(v) G حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خودش است؛

(vi) $G' \leq \Phi(G)$.

حاصل‌ضرب همهٔ زیرگروه‌های نرمال و پوچ‌توان G را که خود یک زیرگروه نرمال و پوچ‌توان است، زیرگروه فیتینگ G گفته و با نماد $F(G)$ یا $\mathrm{Fit}(G)$ آن‌را نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $\frac{F_{i+۱}(G)}{F_i(G)} = F(\frac{G}{F_i(G)})$ به‌طوری‌که $i \geq ۰$. در این‌صورت سری

$$F_{۰}(G) = \{۱\} \leq F_{۱}(G) \leq F_{۲}(G) \leq ...$$

را یک سری فیتینگ گروه G گوییم. گروه G یک گروه حل پذیر است هرگاه عدد صحیح نامنفی n ای وجود داشته به‌طوری‌که $F_n(G) = G$.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم G یک گروه پوچ‌توان باشد و $N \lhd G$. در این‌صورت اگر $N \neq ۱$ آن‌گاه $N \cap Z(G) \neq ۱$.

قضیه ۴.۱. فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر و N زیرگروه نرمال مینیمال از G باشند. در این‌صورت N یک گروه آبلی مقدماتی است.

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $|G| = mn$ که در آن m و n دو عدد طبیعی متباین‌اند. هر زیرگروه G از مرتبهٔ m را یک زیرگروه هال می‌نامند. به عبارت دیگر زیرگروه H از G را زیرگروه هال گویند، در صورتی که اعداد طبیعی $|H|$ و $|G : H|$ نسبت به هم اول باشند.

گاهی اوقات، با استفاده از قضیه‌ای که به قضیهٔ شورـزاسنهاوس مرسوم است، می‌توان برخی از گروه‌های متناهی از مرتبهٔ کوچکتر را رده‌بندی کرد.

قضیه ۱.۵. (شورـزاسنهاوس). فرض کنیم G گروهی متناهی و K زیرگروه نرمالی از آن باشد به‌طوری‌که $(|G : K|, |K|) = ۱$. در این‌صورت G زیرگروهی از مرتبه $|G : K|$ مانند H دارد، به‌طوری‌که $G = KH$، $K \cap H = ۱$.

فرض کنیم $H \leq G$. در این‌صورت بزرگترین زیرگروه نرمال G را که جزء H است، مغز H گفته و با نماد $\mathrm{Core}_G(H)$ آن‌را نمایش می‌دهیم. مرکزساز H در G عبارت است از همهٔ عضوهای G به‌طوری‌که با تمام اعضای H جابه‌جا می‌شود و آن‌را با نماد $C_G(H)$ نمایش می‌دهیم و نرمالساز H در G که آن‌را با نماد $N_G(H)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از تمام عضوهای G مانند g به‌طوری‌که $g^{-۱}Hg = H$. به وضوح دیده می‌شود که $C_G(H) \lhd N_G(H)$. فرض کنیم H و K دو گروه باشند. گروه G را یک توسیع K با H گوییم در صورتی‌که G زیرگروهی نرمالی مانند N داشته باشد به‌طوری‌که $N \cong K$ و $\frac{G}{N} \cong H$. در حالتی که $N \leq \mathrm{Z(G)}$ آن‌گاه G را یک توسیع مرکزی K با H گوییم. هم‌چنین اگر $G = HK$، $K \lhd G$ و $H \cap K = ۱$ آن‌گاه G را یک توسیع شکافنده از K با H گوییم.

فرض کنیم G یک گروه باشد. در این‌صورت مجموعهٔ همهٔ خودریختی‌های G را که با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند، با نماد $\mathrm{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم. اکنون فرض کنیم $g \in G$. در این‌صورت تابع $\sigma_g : G \longrightarrow G$ با ضابطه $x \longmapsto x^g$ یک خودریختی G است. زیرگروه متشکل از همهٔ σ_g ها را که در آن $g \in G$، با $\mathrm{Inn}(G)$ نشان می‌دهند. این زیرگروه، زیرگروه نرمال $\mathrm{Aut}(G)$ است و داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathrm{Inn}(G)$. هم‌چنین هر خودریختی G را که داخلی نباشد، خارجی گوییم. گروه خودریختی‌های خارجی گروه G را با $\mathrm{Out}(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۶. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این‌صورت $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(H)$ یکریخت است.

قضیه ۷.۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. در این‌صورت $\mathrm{Aut}(G)$ آبلی است اگر و تنها اگر G دوری باشد.

قضیه ۸.۱. (**ژوردان_هولدر**). فرض کنیم گروه G دارای یک سری ترکیبی باشد. در این‌صورت هر دو سری ترکیبی G یکریخت‌اند.

قضیه ۹.۱. فرض کنیم G یک p_گروه باشد که دارای دقیقا یک زیرگروه از مرتبه p است. در این‌صورت G یا یک گروه دوری یا گروه کواترنیون تعمیم یافته

$$\langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1,\ x^{2^{n-2}} = y^2,\ y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

است.

۲.۱ مقدمات گراف

اکنون به بیان برخی از مفاهیم در نظریه گراف که در فصل های آینده مورد نیاز هستند می‌پردازیم.

فرض کنیم Γ یک گراف باشد. در این‌صورت از نمادهای $V(\Gamma)$، $E(\Gamma)$، $A(\Gamma)$ و $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ به ترتیب برای نشان دادن مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها، مجموعه کمان‌ها و گروه خودریختی گراف Γ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین منظور از مرتبه گراف همان تعداد عضوهای گراف می‌باشد و گراف متناهی گرافی است که از مرتبه متناهی می‌باشد. هرگاه u و v دو رأس دلخواه از گراف Γ باشند از نماد $\{u, v\}$ یا $u \sim v$ برای آن‌که نشان دهیم u و v مجاور می‌باشند استفاده می‌کنیم. دو یال e و f از گراف Γ را مجاور گوییم هرگاه در یک رأس مشترک باشند. توجه شود که منظور از درجه (ظرفیت) یک رأس مانند v که آن‌را با نماد $d_\Gamma(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم همان تعداد یال‌های مجاور با v است و از نماد $N_\Gamma(v)$، $N(v)$ یا $\Gamma(v)$ برای نشان دادن مجموعه همسایه های (رئوس مجاور) v استفاده می‌کنیم. هم‌چنین گراف Γ را k_منتظم گوییم هرگاه درجهٔ هر رأس آن k باشد. توجه شود در حالتی که گراف ۳_منتظم باشد، آن‌را مکعبی می‌نامیم.

فرض کنیم v_0 و v_r دو رأس از گراف Γ باشند. در این‌صورت یک مسیر از v_0 به v_r دنباله‌ای از یال‌ها و رأس‌ها مانند $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_r v_r$ است، به‌طوری‌که تمام رأس‌ها ظاهر شده متمایز باشند. هم‌چنین هر مسیر بسته را یک دور گوییم و گرافی را که شامل یک دور باشد که از تمام رئوس می‌گذرد، گراف همیلتونی گوییم. اگر بین هر دو رأس دلخواه از Γ یک مسیر وجود داشته باشد آن‌گاه Γ را یک گراف همبند گوییم. هر زیرگراف همبند و بدون دور از گراف

Γ را یک درخت گوییم و منظور از یک درخت فراگیر از گراف Γ، یک زیرگراف همبند و بدون دور از گراف Γ است به‌طوری‌که تعداد راس‌های آن با تعداد رأس‌های گراف Γ یکسان باشد. فرض کنیم T یک درخت فراگیر از گراف Γ باشد. در این‌صورت هر یال که در گراف Γ باشد ولی در T نباشد را یک وتر گوییم.

گرافی را که فقط شامل یک رأس باشد، گراف بدیهی گوییم. اگر در گراف ساده Γ هر زوج از رأس‌های متمایز Γ با یکدیگر مجاور باشند آنگاه Γ را کامل گوییم. در حالتی که $|V(\Gamma)| = n$ آن‌را با نماد K_n نشان می‌دهیم. هم‌چنین گراف Γ را دوبخشی گوییم هرگاه مجموعهٔ رأس‌های آن‌را بتوان به دو مجموعهٔ ناتهی X و Y افراز کرد طوری که هر یال گراف Γ یک رأس در X و یک رأس در Y داشته باشد.

گراف دوبخشی کامل با دو بخش از اندازه‌های m و n را با نماد $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم. یک دور به طول n را با C_n نمایش می‌دهیم و به آن یک nـ دور گوییم. هم‌چنین P_n نشان دهندهٔ یک مسیر روی n رأس است. در نهایت یک گراف یک رأسی با n طوقه را با نماد B_n و یک گراف دو رأسی با n یال بین آن‌ها را با نماد D_n نشان می‌دهیم و به آن‌ها به ترتیب یک دسته از n طوقه و nـ قطبی گوییم.

فرض کنیم u و v دو رأس دلخواه از گراف Γ باشند. در این‌صورت طول کوتاه‌ترین مسیر مابین u و v را با نماد $\partial(u,v)$ یا $d(u,v)$ نشان می‌دهیم.

قطر گراف Γ را با $\max\{\partial(u,v) \mid u,v \in V(\Gamma)\}$ تعریف می‌کنیم و با $\mathrm{diam}(\Gamma)$ آن‌را نمایش می‌دهیم. فرض کنیم V' یک زیرمجموعه از مجموعه رأس‌های گراف Γ باشد به‌طوری‌که $|V'| = k$ و $G - V'$ ناهمبند باشد. در این‌صورت V' را برش k رأس گوییم. به‌طور مشابه یک مجموعه برش یالی نیز قابل تعریف است. مینیمم مقدار k به‌طوری‌که یک برش kـ رأسی وجود داشته باشد را همبندی رأسی یا به‌طور ساده همبندی G گوییم و این مقدار را با $\kappa(\Gamma)$ و یا به طور ساده با κ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه همبندی یالی را با $\lambda(\Gamma)$ و یا λ نمایش می‌دهیم.

یک گراف mـ منتظم با کمر n را که دارای کمترین تعداد رأس باشد یک (m,n)ـ قفس گوییم. در حالتی که $m = ۳$ و $n = ۶$ آنگاه $(۳,۶)$ـ قفس را گراف هیوود می‌نامند.

اکنون به معرفی دو ضرب خیلی مهم در گراف‌ها می‌پردازیم. فرض کنیم X و Y دو گراف باشند. ضرب دکارتی X و Y را که با نماد $X \times Y$ نشان می‌دهیم، گرافی با رئوس $V(X) \times V(Y)$ است به‌طوری‌که برای هر دو رأس $u = (x_۱, y_۱)$ و $v = (x_۲, y_۲)$، $u \sim v$ هرگاه:

$$x_۱ = x_۲ \ \text{،} \quad y_۱ \sim y_۲ \ \text{ یا } \ x_۱ \sim x_۲ \ \text{ و } \ y_۱ = y_۲.$$

هم‌چنین ضرب قاموسی دو گراف X و Y را که با نماد $X[Y]$ نشان می‌دهیم، گرافی با رئوس $V(X) \times V(Y)$ است و برای دو رأس $u = (x_۱, y_۱)$ و $v = (x_۲, y_۲)$، $u \sim v$ هرگاه

$$x_۱ \sim x_۲ \text{ یا } x_۱ = x_۲ \text{ و } y_۱ \sim y_۲$$

مثال ۱۰.۱. ***(i)*** فرض کنیم $Y = K_۲$. در این‌صورت به وضوح $C_۴ = K_۲ \times K_۲$. هم‌چنین اگر $X = K_۲$ و $Y = C_۴$ آن‌گاه $Q_۳ = K_۲ \times C_۴$ که در آن $Q_۳$ گراف مکعب هشت رأسی است.

(ii) فرض کنیم $X = C_۴$ و $Y = ۲K_۱$. در این‌صورت به وضوح $C_۴[۲K_۱] \cong K_{۴,۴}$.

گراف نابدیهی Γ را یک گراف اول گوییم، اگر $\Gamma = X \times Y$ ایجاب کند که X یا Y گراف بدیهی باشند. هم‌چنین دو گراف $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را نسبت به هم اول گوییم هرگاه در تجزیه‌شان به زیرگراف‌های دیگر، زیرگراف یکسانی نداشته باشند.

یک زیرمجموعه M از مجموعه یال‌های E از گراف بدون طوقه Γ را مستقل گوییم هرگاه هیچ دو یال M در Γ مجاور نباشند. یک جورسازی در Γ یک مجموعه مستقل از یال‌ها است. فرض کنیم M جورسازی باشد. در این‌صورت زیرمجموعه S از رأس‌های Γ را اشباع شده توسط M گوییم هرگاه هر رأس S با حداقل یک یال در M مجاور باشد. M را جورسازی تام (کامل) گوییم هرگاه هر رأس Γ توسط M اشباع شده باشد.

یک عامل از گراف Γ یک زیرگراف فراگیر از Γ است. یک kـ عامل از Γ یک عامل از Γ است که kـ منتظم باشد. بنابراین یک ۱ـ عامل از Γ یک جورسازی است که همهٔ رأس‌های Γ را اشباع کند و یک ۱ـ عامل همان جورسازی کامل است.

انقباض مقدماتی از گراف X، عبارت است از حذف دو رأس مجاور مانند u و v و جایگزین کردن آن با رأس جدید w به‌طوری‌که رأس w با رئوسی که با u یا v مجاور بودند، مجاور باشد. هم‌چنین گوییم گراف X قابل انقباض به گراف Y است هرگاه Y توسط تعدادی انقباض‌های مقدماتی از X بدست آید.

تبصره ۱۱.۱. در سراسر این کتاب منظور از گراف، گرافی ساده است مگر آن‌که خلاف آن به صراحت بیان شود. هم‌چنین گرافی را که شامل طوقه است و بین حداقل دو رأس آن بیش از یک یال وجود دارد، گراف چندگانه گوییم.

۳.۱ مقدمات توپولوژی

در نهایت به بیان برخی از مفاهیم در نظریهٔ توپولوژی که در فصل‌های آینده مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $\emptyset$ و X به τ متعلق‌اند؛

(۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه τ به τ متعلق است؛

(۳) اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی τ به τ متعلق است.

مجموعه X را که برای آن توپولوژی مانند τ مشخص شده است، فضای توپولوژی می‌نامیم.

البته درست‌تر آن است که بگوییم فضای توپولوژی عبارت است از زوج (X, τ) که تشکیل شده از مجموعهٔ X و توپولوژی τ در X، ولی هرجا ابهامی وجود نداشته باشد، از ذکر τ خودداری می‌کنیم. اگر X فضای توپولوژی باشد، زیرمجموعه U از X را یک مجموعهٔ باز X خوانیم هرگاه U متعلق به τ باشد. در واقع می‌توان گفت که فضای توپولوژی عبارت است از مجموعه‌ای مانند X همراه با گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن، مرسوم به مجموعه‌های باز به‌طوری‌که $\emptyset$ و X هر دو بازند و اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی مجموعه‌های باز نیز باز است.

لازم یه ذکر است زیرمجموعهٔ C از فضای توپولوژی X را بسته گوییم هرگاه $X - C$ باز باشد و فضای توپولوژی X را همبند گوییم هرگاه X و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه‌های بسته و باز X باشند.

فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را وقتی پیوسته می‌گوییم که به ازای هر زیرمجموعهٔ باز Y مانند V، مجموعهٔ $f^{-1}(V)$ زیرمجموعهٔ باز X باشد. اکنون فرض کنیم تابع $f : X \longrightarrow Y$ یک تناظر دو سویی باشد. اگر f و تابع معکوس آن $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ هر دو پیوسته باشند آن‌گاه f را همسانریخت گوییم. در واقع f یک همسانریخت از X به Y است هرگاه f یک تناظر دو سویی باشد و برای هر مجموعه U، مجموعه $f(U)$ باز است اگر و تنها اگر U باز باشد.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژی X باشد. بنابر تعریف، درون مجموعهٔ A عبارت است از اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز جز A و بستار مجموعه A عبارت است از اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ حاوی A. درون مجموعه A را با A° و بستار آن‌را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی با توپولوژی τ باشد. اگر Y زیرمجموعه‌ای از X باشد، گردایه،

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

توپولوژی در Y است و به توپولوژی زیرفضای یا توپولوژی القایی معروف است. با این توپولوژی، Y را یک زیرفضای X می‌خوانند. مجموعه‌های باز این توپولوژی عبارت‌اند از همهٔ مقاطع مجموعه‌های باز X با Y.

به‌عنوان مثال دایرهٔ واحد S^1 در صفحه $\mathbb{R}^2$ را می‌توان به‌عنوان زیرفضای از $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی معمولی در نظر گرفت.

در حالت کلی nـ کره، $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ را می‌توان به‌عنوان یک زیرفضا از $\mathbb{R}^{n+1}$ با توپولوژی معمولی در نظر گرفت. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک پایه توپولوژی در X گردایه‌ای است از زیرمجموعه‌های X (موسوم به اعضای پایه) به‌طوری‌که

(۱) به ازای هر $x \in X$ دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود باشد؛

(۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد آن‌گاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B_3$ و $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

اگر β یک پایه توپولوژی در X باشد آن‌گاه τ، توپولوژی تولید شده به وسیله β را چنین تعریف می‌کنیم:

زیرمجموعه U از X را در X باز گوییم اگر به ازای هر $x \in U$، عضوی از پایه مانند $B \in \beta$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $x \in B$ و $B \subset U$.

گردایه S از زیرمجموعه‌های X را زیرپایه‌ای برای یک توپولوژی بر X می‌خوانند اگر اجتماع اعضای آن برابر X باشد. در این‌صورت بنا به تعریف توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ زیرپایهٔ S عبارت است از گردایه τ متشکل از همهٔ اجتماع‌های مقاطع متناهی اعضای S. اکنون نگاشت تصویری $\pi_\beta : \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ را با ضابطه $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid$ در X_β باز است $U_\beta\}$ و S نمایش اجتماع این گردایه‌ها باشد. در این‌صورت توپولوژی تولید شده به وسیله زیرپایهٔ S را توپولوژی حاصل ضربی و $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ را فضای حاصل ضربی گوییم.

توجه شود که $S^1 \times S^1$ به‌طوری‌که S^1 یک دایره می‌باشد را یک چنبره گوییم. هم‌چنین منظور از یک دسته، یک چنبره ای می‌باشد که قرص واحد را از آن برداشته‌ایم یا حذف کرده‌ایم.
هم‌چنین یک بطری کلاین، از به هم چسباندن دو نوار موبیوس از مرز مشترک‌شان است.

فصل ۲

مفاهیم اساسی در گروه‌های جایگشتی

فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی متناهی باشد. هر تناظر یک‌به‌یک مانند $\alpha : \Omega \longrightarrow \Omega$ را جایگشت روی Ω گویند. مجموعهٔ همهٔ جایگشت روی Ω با عمل ترکیب توابع تشکیل یک منظم گروه می‌دهد. این گروه را گروه متقارن بر Ω می‌خوانند و آن‌را با $\mathrm{Sym}(\Omega)$ یا $S(\Omega)$ نمایش می‌دهند. اگر $\Omega = \{۱, ۲, ..., n\}$ آن‌گاه گروه متقارن روی Ω را با S_n نشان می‌دهیم. واضح است که $|S_n| = n!$. هر عضو Ω را نقطه می‌نامیم و منظور از $\alpha(i)$، $(i)\alpha$ یا i^α همان تصویر i به‌وسیلهٔ α خواهد بود. گوییم جایگشت α نقطهٔ Ω را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $(x)\alpha = x$. در غیراین‌صورت گوییم جایگشت α نقطهٔ x را حرکت می‌دهد. اگر $\alpha \in S_n$ آن‌گاه α را با نماد $\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ (۱)\alpha & (۲)\alpha & \cdots & (n)\alpha \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. جایگشت $\alpha \in S(\Omega)$ را جایگشت دوری مرتبهٔ n یا یک nـدور نامند هرگاه $a_۱, a_۲, ..., a_n \in \Omega$ موجود باشند، به‌طوری‌که:

$$(a_۱)\alpha = a_۲ \text{ ،} (a_۲)\alpha = a_۳ \text{ ،} \ldots \text{ ،} (a_n)\alpha = a_۱$$

و به‌ازای هر $x \in \Omega - \{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$، $(x)\alpha = x$. چنین جایگشتی را با $(a_۱ \quad a_۲ \quad \ldots \quad a_n)$