



# روش‌های عددی در جبر خطی

با رویکرد حل مسئله و کدنویسی

تألیف

دکتر سعید سهرابی

دانشیار گروه ریاضی دانشگاه ارومیه



سرشناسه:	سهرابی، سعید، ۱۳۵۰ اسفند -
عنوان و نام پدیدآور:	روش‌های عددی در جبر خطی با رویکرد حل مسئله و کدنویسی / سعید سهرابی؛ ویراستار ادبی رحیم کوشش شبستری؛ ویراستار علمی سعید پیش‌بین.
مشخصات نشر:	ارومیه: دانشگاه ارومیه، انتشارات، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری:	د، ۴۱۰ ص.؛ جدول.
فروست:	انتشارات دانشگاه ارومیه؛ ۳۲۲.
شابک:	978-622-5791-23-7
وضعیت فهرست نویسی:	فیپا
یادداشت:	واژه‌نامه.
یادداشت:	کتابنامه: ص. ۳۹۹ - ۴۰۲.
موضوع:	آنالیز عددی -- راهنمای آموزشی (عالی) Numerical analysis -- Study and teaching
موضوع:	آنالیز عددی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی) Numerical analysis -- Problems, exercises, etc (Higher)
شناسه افزوده:	پیش‌بین، سعید، ۱۳۶۱ -، ویراستار
شناسه افزوده:	دانشگاه ارومیه. انتشارات
رده بندی کنگره:	۳/QA۲۹۷
رده بندی دیویی:	۵۱۸/۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی:	۹۱۵۳۴۸۷

مرکز انتشارات دانشگاه ارومیه

ارومیه، کیلومتر ۱۱ جاده سرو، تلفن: ۳۱۹۴۲۲۷۴ - ۳۲۷۷۹۹۳۰ - ۰۴۴، دورنگار ۳۲۷۷۹۹۳۰

عنوان: روش‌های عددی در جبر خطی با رویکرد حل مسئله و کدنویسی

تالیف: دکتر سعید سهرابی

ویراستار علمی: دکتر سعید پیش‌بین

ناشر: انتشارات دانشگاه ارومیه

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: طاها نگار

نوبت چاپ: اول

سال چاپ: ۱۴۰۲

شمارگان: ۲۰۰ نسخه

قیمت پشت جلد: ۲۶۰۰۰۰ تومان

شابک: ۷-۲۳-۵۷۹۱-۶۲۲-۹۷۸

## پیشگفتار

خداوند قادر متعال را شاکر هستم که بار دیگر توفیق نگارش کتاب درسی دیگری نصیبم کرد. نگارش کتابی با عنوان **روش‌های عددی در جبر خطی** که منطبق بر سرفصل‌های مصوب این درس باشد، از مدت‌ها قبل مد نظر اینجانب بود و کتاب حاضر، حاصل سال‌ها تجربه‌ام در تدریس موضوعات مرتبط با این درس در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد می‌باشد.

هدف در این کتاب، ارائه‌ی مفاهیم بنیادی و روش‌های پایه‌ای برای حل عددی مسائل در حیطه جبر خطی و نظریه ماتریس‌ها است. این مسائل کاربردهای متنوعی در علوم (از جمله علوم ریاضی و پایه) و رشته‌های مهندسی دارند. به جرأت می‌توان گفت که مباحث جبر خطی عددی، از حل دستگاه‌های معادلات خطی گرفته، تا حل مسئله‌ی مقدار ویژه، کاربردهای وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم و فنی مهندسی دارند، به طوری که اکثر روش‌های گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل و انتگرال، منجر به دستگاه‌های معادلات جبری خطی یا غیرخطی می‌شوند که باید به روش‌های عددی حل شوند. نمونه‌ای از این مسائل در فصل ۶ آورده شده است.

اگرچه مخاطبان اصلی این کتاب دانشجویان رشته ریاضی کاربردی در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری هستند، اما مطالب کتاب به گونه‌ای طراحی شده است که هم برای مطالعه شخصی و هم برای تدریس در کلاس‌های درس جبر خطی عددی در سطح کارشناسی علوم ریاضی و سایر رشته‌های مهندسی نیز مفید باشد. از آن جا که این کتاب اساساً برای تدریس در کلاس‌های درسی نوشته شده، شامل مجموعه‌ای از مثال‌ها، مسائل حل شده و تمرین‌های متنوع است که برخی از آن‌ها نظری و برخی نیز محاسباتی هستند.

پیش نیاز اصلی برای دنبال کردن مطالب این کتاب، دروس مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی آنالیز عددی است و از آن جا که در این کتاب الگوریتم‌های عددی متعددی برای حل مسائل ارائه شده، یک پیش‌نیاز مهم برای استفاده بهینه از مطالب این کتاب، آشنایی با یکی از نرم‌افزارهای ریاضی برای حل مسائل با رایانه است. نرم‌افزار به کار رفته در این مجموعه، نرم‌افزار ممتیکا است. این نرم‌افزار یکی از قوی‌ترین و موفق‌ترین نرم‌افزارهای ریاضی موجود است که قابلیت‌های ویژه‌ای در محاسبات مربوط به بردارها و ماتریس‌ها دارد.

مطالب کتاب در هفت فصل تدوین شده‌اند: فصل اول، مقدمه‌ای بر بردارها و ماتریس‌ها و مفاهیم پیشرفته مرتبط با آنهاست. فصل دوم، شامل روش‌های مستقیم حل دستگاه‌های خطی و تجزیه و تحلیل این روش‌هاست. در فصل سوم نیز، روش‌های تکراری حل دستگاه‌های خطی همراه با مباحث مرتبط با همگرایی آن‌ها بیان می‌شود. فصل چهارم هم به متعامدسازی و مسئله

حداقل مربعات می‌پردازد. در فصل پنجم روش‌های یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. تجزیه مقادیر تکین ماتریس‌ها و کاربردهای آن موضوع فصل ششم کتاب است و در نهایت، به منظور آشنایی بیشتر خوانندگان با کدنویسی در محیط ممتیکا، کدهای مربوط به برخی الگوریتم‌های عددی ارائه شده، در فصل هفتم آورده شده است.

آن چه مسلم است این است که هیچ اثری عاری از نقص و اشتباه نیست. از این رو، از همکاران گرامی و دانشجویان عزیز انتظار دارم در صورت برخورد با این گونه موارد، نظرات اصلاحی خود را از طریق پست الکترونیکی [s.sohrabi@urmia.ac.ir](mailto:s.sohrabi@urmia.ac.ir) و یا از هر طریق ممکن با اینجانب در میان بگذارند.

در پایان مراتب تشکر و قدردانی خود را از اساتید بزرگواری که زحمت داوری و ویراستاری این کتاب را بر عهده گرفتند، ابراز می‌دارم و از خانواده‌ام که در طول مدت زمان تدوین و آماده‌سازی کتاب، از حمایت کامل آنها برخوردار بودم، صمیمانه سپاسگزارم. باشد که این اثر سهم کوچکی در توسعه علم و دانایی داشته باشد.

سعید سهرابی

دانشگاه ارومیه، پاییز ۱۴۰۱

# فهرست مطالب

---

۱	۱ بردارها و ماتریس‌ها
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ بردارها
۲	۱.۲.۱ نرم برداری
۹	۲.۲.۱ مسائل حل شده
۱۱	۳.۲.۱ تمرین‌ها
۱۲	۳.۱ ماتریس‌ها
۱۲	۱.۳.۱ اثر و دترمینان ماتریس مربعی
۱۷	۲.۳.۱ دترمینان و معکوس ماتریس‌های بلوکی
۲۰	۳.۳.۱ مسائل حل شده
۲۳	۴.۳.۱ تمرین‌ها
۲۵	۵.۳.۱ ماتریس مختلط
۲۶	۶.۳.۱ ترانزپوز و ترانزپوز مزدوج
۲۶	۷.۳.۱ ماتریس متقارن و ماتریس شبه متقارن
۲۸	۸.۳.۱ ماتریس هرمیتی و ماتریس هرمیتی کج

فهرست مطالب

۲۹	.....	۹.۳.۱	ماتریس یکانی و ماتریس نرمال
۳۰	.....	۱۰.۳.۱	مسائل حل شده
۳۲	.....	۱۱.۳.۱	تمرین‌ها
۳۲	.....	۴.۱	رتبه و زیرفضاهای اساسی یک ماتریس
۳۶	.....	۵.۱	نرم ماتریسی
۴۲	.....	۱.۵.۱	مسائل حل شده
۴۵	.....	۲.۵.۱	تمرین‌ها
۴۷	.....	۶.۱	عدد وضعیت یک ماتریس
۴۹	.....	۱.۶.۱	مسائل حل شده
۵۰	.....	۲.۶.۱	تمرین‌ها
۵۲	.....	۷.۱	خوش وضعی و بد وضعی ماتریس‌ها
۵۲	.....	۱.۷.۱	ماتریس هیلبرت و بد وضعی آن
۵۴	.....	۸.۱	ضرب‌های ماتریسی
۵۴	.....	۱.۸.۱	ضرب کرونکر
۶۰	.....	۲.۸.۱	ضرب هادامارد
۶۱	.....	۹.۱	ماتریس‌های خاص
۶۱	.....	۱.۹.۱	ماتریس مدور
۶۲	.....	۲.۹.۱	ماتریس تاپلیتز
۶۳	.....	۳.۹.۱	ماتریس هادامارد
۶۴	.....	۴.۹.۱	ماتریس هنکل
۶۴	.....	۵.۹.۱	ماتریس تصادفی
۶۵	.....	۱۰.۱	تعاریف و قضایای مقدماتی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
۷۸	.....	۱.۱۰.۱	تمرین‌ها
۷۹	.....	۱۱.۱	توابع ماتریسی و محاسبه آنها
۸۱	.....	۱.۱۱.۱	روش سری تیلور
۸۴	.....	۲.۱۱.۱	روش لم شور (استفاده از مقادیر ویژه ماتریس)
۸۶	.....	۳.۱۱.۱	روش سیلوستر-لاگرانژ
۸۷	.....	۴.۱۱.۱	روش انتگرال کوشی
۸۷	.....	۵.۱۱.۱	تمرین‌ها
۸۹	.....	۲	روش‌های مستقیم حل دستگاه معادلات خطی
۸۹	.....	۱.۲	مقدمه
۹۱	.....	۲.۲	روش حذفی گاوس

فهرست مطالب

۹۲	گام‌های روش حذفی گاوس	۱.۲.۲
۹۴	حل دستگاه مثلثی	۲.۲.۲
۹۷	روش گاوس-جردن	۳.۲.۲
۹۸	محاسبه تعداد اعمال حسابی در روش حذفی گاوس	۴.۲.۲
۱۰۰	اشکالات روش حذفی گاوس	۵.۲.۲
۱۰۱	مقیاس کردن	۶.۲.۲
۱۰۱	محورگیری جزئی	۷.۲.۲
۱۰۲	محورگیری کلی	۸.۲.۲
۱۰۶	مسائل حل شده	۹.۲.۲
۱۰۸	تمرین‌ها	۱۰.۲.۲
۱۱۰	ماتریس معین مثبت و ماتریس قطر غالب	۳.۲
۱۱۱	ویژگی‌های ماتریس معین مثبت	۱.۳.۲
۱۱۹	ماتریس قطر غالب اکید	۲.۳.۲
۱۲۰	ویژگی‌های ماتریس قطر غالب اکید	۳.۳.۲
۱۲۳	مسائل حل شده	۴.۳.۲
۱۲۴	تمرین‌ها	۵.۳.۲
۱۲۵	حل دستگاه معادلات خطی برپایه تجزیه ماتریس‌ها	۴.۲
۱۲۶	تجزیه $LU$ ماتریس‌ها	۱.۴.۲
۱۳۱	روش دولیتل برای تجزیه ماتریس‌ها	۲.۴.۲
۱۳۳	محاسبه تعداد عملیات حسابی در تجزیه $LU$ یک ماتریس	۳.۴.۲
۱۳۴	حل دستگاه $Ax = b$ به کمک تجزیه $LU$	۴.۴.۲
۱۳۵	ماتریس جایگشت	۵.۴.۲
۱۳۶	تجزیه $PLU$ یک ماتریس	۶.۴.۲
۱۳۹	تجزیه $MM^T$ یک ماتریس متقارن و معین مثبت	۷.۴.۲
۱۴۱	تجزیه چولسکی یک ماتریس	۸.۴.۲
۱۴۴	مسائل حل شده	۹.۴.۲
۱۴۶	تمرین‌ها	۱۰.۴.۲
۱۴۷	ماتریس ضرایب سه‌قطری در دستگاه معادلات خطی	۵.۲
۱۴۸	روش توماس	۱.۵.۲
۱۴۹	روش تجزیه $LU$	۲.۵.۲
۱۵۰	تمرین‌ها	۳.۵.۲
۱۵۱	خطاهای ناشی از اختلال در دستگاه معادلات خطی	۶.۲

فهرست مطالب

۱۵۵	برآورد تقریبی عدد وضعیت یک دستگاه	۱.۶.۲
۱۵۸	مسائل حل شده	۲.۶.۲
۱۶۰	تمرین‌ها	۳.۶.۲
۱۶۳	<b>روش‌های تکراری حل دستگاه معادلات خطی</b>	<b>۳</b>
۱۶۳	روش‌های بازگشتی خطی	۱.۳
۱۶۵	روش ژاکوبی	۱.۱.۳
۱۶۷	روش گاوس-سیدل	۲.۱.۳
۱۶۹	روش SOR (فوق تخفیف متوالی)	۳.۱.۳
۱۷۱	تحلیل همگرایی روش‌های تکراری	۴.۱.۳
۱۸۶	مسائل حل شده	۵.۱.۳
۱۸۹	تمرین‌ها	۶.۱.۳
۱۹۳	روش‌های تکراری ریچاردسون و گرادیان	۲.۳
۱۹۴	روش ریچاردسون	۱.۲.۳
۱۹۵	روش گرادیان (تندترین کاهش)	۲.۲.۳
۲۰۰	روش گرادیان مزدوج	۳.۲.۳
۲۰۳	مسائل حل شده	۴.۲.۳
۲۰۴	تمرین‌ها	۵.۲.۳
۲۰۵	حل دستگاه‌های وندرمنوند	۳.۳
۲۰۹	<b>متعامدسازی و مسئله حداقل مربعات</b>	<b>۴</b>
۲۰۹	متعامدسازی گرام-اشمیت	۱.۴
۲۱۴	مسائل حل شده	۱.۱.۴
۲۱۵	تمرین‌ها	۲.۱.۴
۲۱۶	تجزیه QR ماتریس‌ها	۲.۴
۲۱۷	روش گرام-اشمیت	۱.۲.۴
۲۱۹	مسائل حل شده	۲.۲.۴
۲۲۰	تمرین‌ها	۳.۲.۴
۲۲۱	مسئله حداقل مربعات	۳.۴
۲۲۱	روش معادلات نرمال	۱.۳.۴
۲۲۷	روش تجزیه QR	۲.۳.۴
۲۳۰	مسائل حل شده	۳.۳.۴
۲۳۱	تمرین‌ها	۴.۳.۴



فهرست مطالب

۲۳۲	برازش داده‌ها با روش حداقل مربعات	۴.۴
۲۳۶	تمرین‌ها	۱.۴.۴
۲۳۶	جواب حداقل نرم دستگاه‌های فرو معین	۵.۴
۲۳۸	استفاده از روش کم‌ترین مربعات	۱.۵.۴
۲۴۱	تمرین‌ها	۲.۵.۴
۲۴۳	روش‌های عددی حل مسئله مقدار ویژه	۵
۲۴۳	قطری‌سازی ماتریس‌های مربعی	۱.۵
۲۶۶	مسائل حل شده	۱.۱.۵
۲۷۲	تمرین‌ها	۲.۱.۵
۲۷۳	مقادیر ویژه ماتریس‌های سه‌قطری و هسنبرگی	۲.۵
۲۷۳	دنباله اشتورم	۱.۲.۵
۲۷۴	محاسبه مقادیر ویژه ماتریس‌های سه‌قطری	۲.۲.۵
۲۷۸	محاسبه مقادیر ویژه ماتریس‌های هسنبرگی	۳.۲.۵
۲۸۰	مسائل حل شده	۴.۲.۵
۲۸۲	تمرین‌ها	۵.۲.۵
۲۸۴	روش‌های مستقیم محاسبه مقادیر ویژه	۳.۵
۲۸۴	روش کریلف	۱.۳.۵
۲۸۶	روش فادیو-لورییر	۲.۳.۵
۲۸۸	روش ضرایب نامعین	۳.۳.۵
۲۹۰	مسائل حل شده	۴.۳.۵
۲۹۲	تمرین‌ها	۵.۳.۵
۲۹۲	روش‌های توانی	۴.۵
۲۹۷	تسریع روش توانی	۱.۴.۵
۳۰۰	روش توانی معکوس	۲.۴.۵
۳۰۴	مسائل حل شده	۳.۴.۵
۳۰۶	تمرین‌ها	۴.۴.۵
۳۰۷	روش‌های تقلیل	۵.۵
۳۰۷	روش اول	۱.۵.۵
۳۱۲	روش دوم	۲.۵.۵
۳۱۴	مسائل حل شده	۳.۵.۵
۳۱۵	تمرین‌ها	۴.۵.۵
۳۱۶	روش‌های تبدیلی	۶.۵

فهرست مطالب

۳۱۶	روش ژاکوبی	۱.۶.۵
۳۲۱	روش گیونز	۲.۶.۵
۳۲۵	روش هاوس هولدر	۳.۶.۵
۳۳۴	مسائل حل شده	۴.۶.۵
۳۳۷	تمرین ها	۵.۶.۵
۳۳۸	روش های مبتنی بر تجزیه	۷.۵
۳۳۸	روش $LU$	۱.۷.۵
۳۴۰	روش $QR$	۲.۷.۵
۳۴۱	مسائل حل شده	۳.۷.۵
۳۴۲	تمرین ها	۴.۷.۵
۳۴۳	<b>۶ تجزیه مقادیر تکین</b>	
۳۴۳	مقادیر تکین یک ماتریس	۱.۶
۳۴۶	تمرین ها	۱.۱.۶
۳۴۶	تجزیه یک ماتریس بر اساس مقادیر تکین	۲.۶
۳۵۲	محاسبه دترمینان و معکوس یک ماتریس مربعی	۱.۲.۶
۳۵۳	تعیین زیر فضاها ی اساسی یک ماتریس	۲.۲.۶
۳۵۶	مسائل حل شده	۳.۲.۶
۳۵۷	تمرین ها	۴.۲.۶
۳۵۷	ماتریس شبه معکوس و حل مسئله کم ترین مربعات خطی	۳.۶
۳۶۳	حل مسئله کم ترین مربعات خطی	۱.۳.۶
۳۶۷	مسائل حل شده	۲.۳.۶
۳۶۹	تمرین ها	۳.۳.۶
۳۷۰	تقریب رتبه پایین ماتریس ها	۴.۶
۳۷۶	کاهش نویز سیگنال ها	۱.۴.۶
۳۷۹	فشرده سازی داده های تصویری	۲.۴.۶
۳۸۳	<b>۷ کُدنویسی با نرم افزار ممتیکا</b>	
۳۸۳	مقدمه	۱.۷
۳۸۵	روش حذفی گاوس برای حل دستگاه خطی $Ax = b$	۲.۷
۳۸۶	تجزیه دولیتل یک ماتریس	۳.۷
۳۸۷	تجزیه کروت یک ماتریس	۴.۷
۳۸۸	تجزیه چولسکی یک ماتریس	۵.۷

فهرست مطالب

۳۸۹	.....	$Tx = d$	روش توماس برای حل دستگاه سه‌قطری	۶.۷
۳۹۰	.....	$Tx = d$	روش تجزیه $LU$ برای حل دستگاه سه‌قطری	۷.۷
۳۹۱	.....	$Ax = b$	روش ژاکوبی برای حل دستگاه خطی	۸.۷
۳۹۲	.....	$Ax = b$	روش گاوس-سیدل برای حل دستگاه خطی	۹.۷
۳۹۳	.....	$Ax = b$	روش SOR برای حل دستگاه خطی	۱۰.۷
۳۹۴	.....	$Ax = b$	روش گرادیان مزدوج برای حل دستگاه خطی	۱۱.۷
۳۹۵	.....		فرآیند گرام-اشمیت کلاسیک	۱۲.۷
۳۹۶	.....		تجزیه $QR$ یک ماتریس به روش گرام-اشمیت	۱۳.۷
۳۹۷	.....		روش توانی	۱۴.۷
۳۹۸	.....		روش توانی معکوس	۱۵.۷
۳۹۹	.....		روش تقلیل برای یافتن دومین مقدار ویژه غالب یک ماتریس	۱۶.۷
			روش ژاکوبی برای یافتن تقریبی از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس	۱۷.۷
۴۰۰	.....		مقارن	
۴۰۱	.....		تجزیه $QR$ یک ماتریس به روش هاوس هولدر	۱۸.۷

۴۰۳

مراجع

۴۰۷

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی



# فصل ۱

---

## بردارها و ماتریس‌ها

---

### ۱.۱ مقدمه

هدف از این بخش مروری بر مفاهیم پیشرفته عملیات بردارها و ماتریس‌ها، معرفی برخی ماتریس‌های خاص، مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌ها و نیز توابع ماتریسی است. مطالب این فصل جنبه مقدماتی دارد و در صورت آشنایی خوانندگان با مفاهیم پایه‌ای بردارها و ماتریس‌ها، مطالعه کتاب را می‌توان از فصل دوم آغاز نمود.

## ۲.۱ بردارها

فرض کنید  $\mathbb{F}$  یک میدان باشد. هر بردار<sup>۱</sup> را می‌توان به صورت لیست محدودی از عناصر  $\mathbb{F}$  به شکل سطری یا ستونی نمایش داد:

$$u = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n), \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

هرکدام از عناصر داخل بردار را یک مؤلفه یا درآیه آن بردار و تعداد عناصر یک بردار را بُعد آن بردار می‌نامند. مجموعه همه بردارهای ستونی  $n$  تایی روی میدان  $\mathbb{F}$ ، با اعمال جمع بردارها و ضرب اسکالر، یک فضای برداری<sup>۲</sup> تشکیل می‌دهند که آن را با نماد  $\mathbb{F}^n$  نشان می‌دهیم.

نکته ۱.۱. در مباحث جبر خطی عددی عموماً،  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  یا  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱ (ضرب داخلی). فرض کنید  $x$  و  $y$  دو بردار در  $\mathbb{C}^n$  باشند. ضرب داخلی آنها را با نماد  $\langle x, y \rangle$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = x^H y. \quad (1.1)$$

در برخی متون علمی، ضرب داخلی را به صورت  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = y^H x$  نیز تعریف می‌کنند.

تعریف ۳.۱. دو بردار  $x, y \in \mathbb{C}^n$  را متعامد می‌گوییم هرگاه  $\langle x, y \rangle = 0$ . در این صورت می‌نویسیم:  $x \perp y$ .

## ۱.۲.۱ نرم برداری

تعریف ۴.۱. تابع  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  که به هر بردار  $x \in \mathbb{C}^n$  عدد حقیقی  $\|x\|$  را نسبت می‌دهد، یک نرم برداری روی  $\mathbb{C}^n$  نامیده می‌شود، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

---

Vector<sup>۱</sup>  
Vector Space<sup>۲</sup>

(الف)  $\forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \geq 0$ .

(ب)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ .

(ج)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}^n, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .

(د)  $\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

در صورتی که خاصیت (ب) دو طرفه برقرار نباشد، آن را یک شبه نرم <sup>۳</sup> می‌نامند.

نرم‌های برداری رایج برای بردار  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$  عبارتند از:  
 (الف)  $p$ -نرم: برای هر عدد حقیقی  $1 \leq p$ ، نرم  $p$  یا نرم  $l^p$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

به‌ازای  $p = 1$ ، نرم

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

را نرم مطلق و به‌ازای  $p = 2$ ، نرم

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

را نرم اقلیدسی نیز می‌نامند.

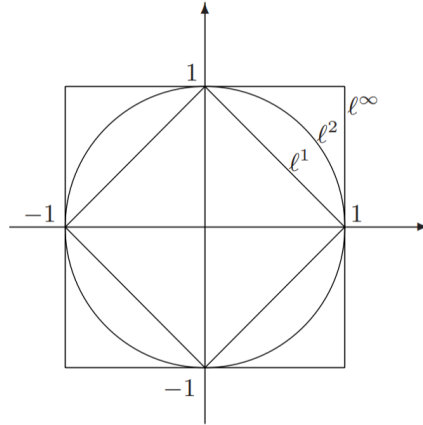
(ب) نرم بی‌نهایت: نرم ماکزیمم (نرم یکنواخت) یا نرم  $l^\infty$  که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

شکل ۱.۱ گوی‌های واحد <sup>۴</sup> تعریف شده به وسیله نرم‌های  $l^1, l^2$  و  $l^\infty$  را در  $\mathbb{R}^2$  نشان می‌دهد.

---

<sup>۳</sup>Semi-norm  
<sup>۴</sup>Unit circles



شکل ۱.۱ گوی‌های واحد برای نرم‌های  $l^1$ ،  $l^2$  و  $l^\infty$  در  $\mathbb{R}^2$ .

مثال ۵.۱. نشان می‌دهیم نرم بی‌نهایت در تعریف نرم برداری صدق می‌کند.  
 حل: نشان دادن سه خاصیت اول ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. برای خاصیت چهارم داریم:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \|x + y\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i| + |y_i|\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

مثال ۶.۱. برای هر بردار  $x \in \mathbb{C}^n$ ، نشان دهید:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

حل: داریم:

$$|x_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



پس،  $\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$ . همچنین، داریم:

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2$$

که از آن هم نتیجه می شود:  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ .

### لم ۷.۱. نامساوی کوشی-شوارتز<sup>۵</sup>

برای هر دو بردار  $n$  بعدی  $x$  و  $y$  در  $\mathbb{R}^n$  داریم:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \quad (2.1)$$

اثبات. به ازای هر عدد حقیقی  $\xi$  داریم:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |\xi x_i + y_i|^2 = \xi^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right) \xi + \sum_{i=1}^n |y_i|^2,$$

چون نامعادله درجه دوم فوق (بر حسب  $\xi$ ) تغییر علامت نمی دهد و همواره مثبت است، پس همواره،  $0 \leq \Delta$  و در نتیجه

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right),$$

■

که از آن هم نتیجه مطلوب حاصل می شود.

نکته ۸.۱. در صورتی که  $x, y \in \mathbb{C}^n$ ، نامساوی کوشی-شوارتز به شکل زیر قابل بیان است:

$$\sum_{i=1}^n |x_i \bar{y}_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

### لم ۹.۱. نامساوی هولدر<sup>۶</sup>

برای هر دو بردار  $n$  بعدی  $x$  و  $y$  در  $\mathbb{R}^n$  و هر  $p, q \in (1, +\infty)$  که  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، داریم:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \quad (4.1)$$

<sup>۵</sup> Cauchy-Schwarz inequality  
<sup>۶</sup> Hölder's inequality

اثبات. ابتدا توجه داریم که برای هر دو عدد حقیقی  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  و  $p, q > 1$ ، نابرابری زیر را که به نابرابری یونگ<sup>۷</sup> معروف است، داریم:

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \quad (5.1)$$

حال برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$ ، با فرض  $\alpha = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$  و  $\beta = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$  از نامساوی فوق، خواهیم داشت:

$$\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

اکنون اگر نامساوی‌های بالا را روی  $i$  جمع ببندیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|y\|_q^q} \right) \\ &= \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

نکته ۱۰.۱. اگر در نامساوی هولدر قرار دهیم:  $p = q = 2$ ، نامساوی کوشی-شوارتز حاصل می‌شود.

تعریف ۱۱.۱. دنباله  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  از بردارها در  $\mathbb{C}^n$  را نسبت به نرم  $\|\cdot\|$  همگرا به بردار  $x \in \mathbb{C}^n$  گوئیم، هرگاه برای هر  $\epsilon > 0$  عدد صحیحی مانند  $N(\epsilon)$  یافت شود، به طوری که برای هر  $k \geq N(\epsilon)$  داشته باشیم:

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \epsilon.$$

<sup>۷</sup>Young's inequality

## ۷ ۲.۱ بردارها

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x,$$

یا به طور معادل

$$\|x^k - x\| \rightarrow 0.$$

قضیه ۱۲.۱. هر نرم برداری، تابعی پیوسته از مؤلفه‌های بردار  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  است.

اثبات. فرض کنید  $\|\cdot\|$  یک نرم برداری دلخواه و  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از بردارها در  $\mathbb{C}^n$  باشد که به بردار  $x \in \mathbb{C}^n$  همگراست. با توجه به تمرین (۲۰.۱) برای هر  $k = 1, 2, \dots$  داریم:

$$0 \leq \left| \|x^{(k)}\| - \|x\| \right| \leq \|x^{(k)} - x\|.$$

چون  $x^k \rightarrow x$ ، پس  $\|x^k - x\| \rightarrow 0$ . بنابراین از قضیه فشردگی نتیجه می‌شود:

$$\left| \|x^{(k)}\| - \|x\| \right| \rightarrow 0,$$

و یا

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)}\| = \|x\|.$$

■

## تعریف ۱۳.۱. هم‌ارزی نرم‌های برداری

جفت نرم برداری  $\|\cdot\|$  و  $\|\cdot\|'$  را معادل یا هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم:  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ ، هرگاه اعداد ثابت و مثبت  $m$  و  $M$  موجود باشند، به قسمی که برای هر  $x \in \mathbb{C}^n$  داشته باشیم:

$$m\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq M\|\cdot\|. \quad (۶.۱)$$

مثال ۱۴.۱. نرم‌های  $l^p$  و  $l^\infty$  هم‌ارزند؛ زیرا با فرض  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (1 \leq k \leq n),$$

داریم:

$$|x_k| = \left(|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}|x_k|,$$

که از آن هم نتیجه می‌شود:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_{\infty}.$$

قضیه ۱۵.۱. نرم‌های برداری روی  $\mathbb{C}^n$  هم‌ارز هستند.

اثبات. جفت نرم برداری  $\|\cdot\|$  و  $\|\cdot\|'$  را روی  $\mathbb{C}^n$  در نظر می‌گیریم و برای راحتی کار یکی از آنها را نرم بی‌نهایت اختیار می‌کنیم (زیرا می‌توان نشان داد که هرگاه دو نرم دلخواه با نرم بی‌نهایت در رابطه هم‌ارزی (۶.۱) صدق کنند، آنگاه دو نرم دلخواه نیز در رابطه نظیر صدق خواهند کرد).

اکنون مجموعه  $S$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{x : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_{\infty} = 1\} \subset \mathbb{C}^n.$$

$S$  یک مجموعه بسته و کراندار در  $\mathbb{C}^n$  است (چرا؟) و چون  $\|x\|$  یک تابع پیوسته روی  $S$  است، پس بر طبق قضیه وایرستراس، مقدار می‌نیمم و ماکزیمم خود را در نقاطی مانند  $x_0$  و  $x_1$  از  $S$  اختیار می‌کند به طوری که

$$\|x_0\| = \min_{x \in S} \|x\|, \quad \|x_1\| = \max_{x \in S} \|x\|.$$

در نتیجه

$$\forall x \in S, \|x_0\| \leq \|x\| \leq \|x_1\|.$$

از طرفی، برای هر بردار دلخواه  $y \neq 0$  در  $\mathbb{C}^n$ ، بردار  $\frac{y}{\|y\|_{\infty}}$  متعلق به  $S$  است. بنابراین داریم:

$$\|x_0\| \leq \frac{\|y\|}{\|y\|_{\infty}} \leq \|x_1\|,$$