بسم الله الرحمن الرحیم

روش‌های عددی در جبر خطی

با رویکرد حل مسئله و کُدنویسی

تألیف

دکتر سعید سهرابی

دانشیار گروه ریاضی دانشگاه ارومیه

سرشناسه:	**سهرابی، سعید، ۱۳۵۰ اسفند-**
عنوان و نام پدیدآور:	**روش‌های عددی در جبر خطی با رویکرد حل مسئله و کدنویسی/سعید سهرابی؛ ویراستار ادبی رحیم کوشش‌شبستری ؛ ویراستار علمی سعید پیش‌بین.**
مشخصات نشر:	**ارومیه: دانشگاه ارومیه، انتشارات، ۱۴۰۲.**
مشخصات ظاهری:	**د، ۴۱۰ ص.: جدول.**
فروست:	**انتشارات دانشگاه ارومیه؛ ۳۲۲.**
شابک:	978-622-5791-23-7
وضعیت فهرست نویسی:	**فیپا**
یادداشت:	**واژه‌نامه.**
یادداشت:	**کتابنامه: ص. ۳۹۹ - ۴۰۲.**
موضوع:	**آنالیز عددی --راهنمای آموزشی (عالی) Numerical analysis -- Study and teaching**
موضوع:	**آنالیز عددی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی) Numerical analysis -- Problems, exercises, etc (Higher)**
شناسه افزوده:	**پیش‌بین، سعید، ۱۳۶۱ -، ویراستار**
شناسه افزوده:	**دانشگاه ارومیه. انتشارات**
رده بندی کنگره:	**۳/QA۲۹۷**
رده بندی دیویی:	**۵۱۸/۰۷۶**
شماره کتابشناسی ملی:	**۹۱۵۳۴۸۷**

مرکز انتشارات دانشگاه ارومیه

ارومیه، کیلومتر ۱۱ جاده سرو، تلفن: ۳۱۹۴۲۲۷۴ -۳۲۷۷۹۹۳۰ -۰۴۴ ،دورنگار ۳۲۷۷۹۹۳۰

عنوان: روش‌های عددی در جبر خطی با رویکرد حل مسئله و کُدنویسی

تالیف: دکتر سعید سهرابی

ویراستار علمی: دکتر سعید پیش‌بین

ناشر: انتشارات دانشگاه ارومیه

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: طاها نگار

نوبت چاپ: اول

سال چاپ:۱۴۰۲

شمارگان: ۲۰۰ نسخه

قیمت پشت جلد: ۲۶۰۰۰۰ تومان

شابک: ۷-۲۳-۵۷۹۱-۶۲۲-۹۷۸

پیشگفتار

خداوند قادر متعال را شاکر هستم که بار دیگر توفیق نگارش کتاب درسی دیگری نصیبم کرد. نگارش کتابی با عنوان **روش‌های عددی در جبر خطی** که منطبق بر سرفصل‌های مصوب این درس باشد، از مدت‌ها قبل مد نظر اینجانب بود و کتاب حاضر، حاصل سال‌ها تجربه‌ام در تدریس موضوعات مرتبط با این درس در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد می‌باشد.

هدف در این کتاب، ارائه‌ی مفاهیم بنیادی و روش‌های پایه‌ای برای حل عددی مسائل در حیطه جبر خطی و نظریه ماتریس‌ها است. این مسائل کاربردهای متنوعی در علوم (از جمله علوم ریاضی و پایه) و رشته‌های مهندسی دارند. به جرأت می‌توان گفت که مباحث جبر خطی عددی، از حل دستگاه‌های معادلات خطی گرفته، تا حل مسئله‌ی مقدار ویژه، کاربردهای وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم و فنی مهندسی دارند، به طوری که اکثر روش‌های گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل و انتگرال، منجر به دستگاه‌های معادلات جبری خطی یا غیرخطی می‌شوند که باید به روش‌های عددی حل شوند. نمونه‌ای از این مسائل در فصل ۶ آورده شده است.

اگرچه مخاطبان اصلی این کتاب دانشجویان رشته ریاضی کاربردی در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری هستند، اما مطالب کتاب به گونه‌ای طراحی شده است که هم برای مطالعه شخصی و هم برای تدریس در کلاس‌های درس جبر خطی عددی در سطح کارشناسی علوم ریاضی و سایر رشته‌های مهندسی نیز مفید باشد. از آن جا که این کتاب اساساً برای تدریس در کلاس‌های درسی نوشته شده، شامل مجموعه‌ای از مثال‌ها، مسائل حل‌شده و تمرین‌های متنوع است که برخی از آن‌ها نظری و برخی نیز محاسباتی هستند.

پیش نیاز اصلی برای دنبال کردن مطالب این کتاب، دروس مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی آنالیز عددی است و از آن جا که در این کتاب الگوریتم‌های عددی متعددی برای حل مسائل ارائه شده، یک پیش‌نیاز مهم برای استفاده بهینه از مطالب این کتاب، آشنایی با یکی از نرم‌افزارهای ریاضی برای حل مسائل با رایانه است. نرم‌افزار به کار رفته در این مجموعه، نرم‌افزار متمتیکا است. این نرم‌افزار یکی از قوی‌ترین و موفق‌ترین نرم‌افزارهای ریاضی موجود است که قابلیت‌های ویژه‌ای در محاسبات مربوط به بردارها و ماتریس‌ها دارد.

مطالب کتاب در هفت فصل تدوین شده‌اند: فصل اول، مقدمه‌ای بر بردارها و ماتریس‌ها و مفاهیم پیشرفته مرتبط با آنهاست. فصل دوم، شامل روش‌های مستقیم حل دستگاه‌های خطی و تجزیه و تحلیل این روش‌هاست. در فصل سوم نیز، روش‌های تکراری حل دستگاه‌های خطی همراه با مباحث مرتبط با همگرایی آن‌ها بیان می‌شود. فصل چهارم هم به متعامدسازی و مسئله

حداقل مربعات می‌پردازد. در فصل پنجم روش‌های یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. تجزیه مقادیر تکین ماتریس‌ها و کاربردهای آن موضوع فصل ششم کتاب است و در نهایت، به منظور آشنایی بیشتر خوانندگان با کُدنویسی در محیط متمتیکا، کدهای مربوط به برخی الگوریتم‌های عددی ارائه شده، در فصل هفتم آورده شده است.

آن چه مسلم است این است که هیچ اثری عاری از نقص و اشتباه نیست. از این رو، از همکاران گرامی و دانشجویان عزیز انتظار دارم در صورت برخورد با این گونه موارد، نظرات اصلاحی خود را از طریق پست الکترونیکی $s.sohrabi@urmia.ac.ir$ و یا از هر طریق ممکن با اینجانب در میان بگذارند.

در پایان مراتب تشکر و قدردانی خود را از اساتید بزرگواری که زحمت داوری و ویراستاری این کتاب را بر عهده گرفتند، ابراز می‌دارم و از خانواده‌ام که در طول مدت زمان تدوین و آماده‌سازی کتاب، از حمایت کامل آنها برخوردار بودم، صمیمانه سپاسگزارم. باشد که این اثر سهم کوچکی در توسعه‌ی علم و دانایی داشته باشد.

سعید سهرابی

دانشگاه ارومیه، پاییز ۱۴۰۱

فهرست مطالب

فصل ۱

بردارها و ماتریس‌ها

۱.۱ مقدمه

هدف از این بخش مروری بر مفاهیم پیشرفته عملیات بردارها و ماتریس‌ها، معرفی برخی ماتریس‌های خاص، مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌ها و نیز توابع ماتریسی است. مطالب این فصل جنبه مقدماتی دارد و در صورت آشنایی خوانندگان با مفاهیم پایه‌ای بردارها و ماتریس‌ها، مطالعه کتاب را می‌توان از فصل دوم آغاز نمود.

۲.۱ بردارها

فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. هر بردار [۱] را می‌توان به‌صورت لیست محدودی از عناصر $\mathbb{F}$ به شکل سطری یا ستونی نمایش داد:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

هرکدام از عناصر داخل بردار را یک مؤلفه یا درآیه آن بردار و تعداد عناصر یک بردار را بُعد آن بردار می‌نامند. مجموعه همه بردارهای ستونی n تایی روی میدان $\mathbb{F}$، با اعمال جمع بردارها و ضرب اسکالر، یک فضای برداری [۲] تشکیل می‌دهند که آن را با نماد $\mathbb{F}^n$ نشان می‌دهیم.

نکته ۱.۱. در مباحث جبر خطی عددی عموماً، $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱ (ضرب داخلی)**.** فرض کنید x و y دو بردار در $\mathbb{C}^n$ باشند. ضرب داخلی آنها را با نماد $\langle x, y\rangle$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = x^H y. \tag{۱.۱}$$

در برخی متون علمی، ضرب داخلی را به‌صورت $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^H x$ نیز تعریف می‌کنند.

تعریف ۳.۱. دو بردار $x, y \in \mathbb{C}^n$ را متعامد می‌گوییم هرگاه $\langle x, y\rangle = 0$. در این صورت می‌نویسیم: $x \perp y$.

۱.۲.۱ نرم برداری

تعریف ۴.۱. تابع $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ که به هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$ عدد حقیقی $\|x\|$ را نسبت می‌دهد، یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ نامیده می‌شود، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

---
[۱] Vector
[۲] Vector Space

الف) $\forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \geq 0$.

ب) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$.

ج) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}^n, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

د) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در صورتی که خاصیت (ب) دو طرفه برقرار نباشد، آن را یک شبه نرم [3] می‌نامند.

نرم‌های برداری رایج برای بردار $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ عبارتند از:
الف) $p-$نرم: برای هر عدد حقیقی $p \geq 1$ ، نرم p یا نرم l^p به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

به‌ازای $p = 1$، نرم

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

را نرم مطلق و به‌ازای $p = 2$، نرم

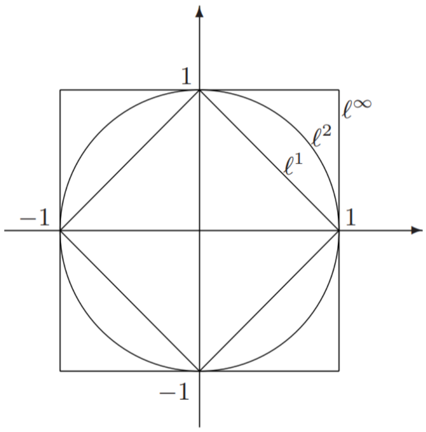
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

را نرم اقلیدسی نیز می‌نامند.
ب) نرم بی‌نهایت: نرم ماکزیمم (نرم یکنواخت) یا نرم l^∞ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

شکل ۱.۱ گوی‌های واحد [4] تعریف شده به‌وسیله نرم‌های l^1, l^2 و l^∞ را در $\mathbb{R}^2$ نشان می‌دهد.

[3] Semi-norm
[4] Unit circles



شکل ۱.۱ گوی‌های واحد برای نرم‌های $l^۱$، $l^۲$ و l^∞ در $\mathbb{R}^۲$.

مثال ۵.۱. نشان می‌دهیم نرم بی‌نهایت در تعریف نرم برداری صدق می‌کند.

حل: نشان دادن سه خاصیت اول ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. برای خاصیت چهارم داریم:

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \|x+y\|_\infty &= \max_{۱\le i\le n} |x_i + y_i| \\ &\le \max_{۱\le i\le n} \{|x_i| + |y_i|\} \\ &\le \max_{۱\le i\le n} |x_i| + \max_{۱\le i\le n} |y_i| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.\end{aligned}$$

مثال ۶.۱. برای هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$، نشان دهید:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_۲ \le \|x\|_۱ \,.$$

حل: داریم:

$$|x_i| \le \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

پس، $\|x\|_{\infty} \le \|x\|_{2}$. همچنین، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$$

که از آن هم نتیجه می شود: $\|x\|_2 \le \|x\|_1$.

لم ۷.۱. نامساوی کوشی–شوارتز [۵]

برای هر دو بردار n بعدی x و y در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_2 \|y\|_2 \, . \tag{۲.۱}$$

اثبات. به‌ازای هر عدد حقیقی ξ داریم:

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} |\xi x_i + y_i|^2 = \xi^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)\xi + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2,$$

چون نامعادله درجه دوم فوق (بر حسب ξ) تغییر علامت نمی‌دهد و همواره مثبت است، پس همواره، $\Delta \le 0$ و در نتیجه

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right),$$

که از آن هم نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. ■

نکته ۸.۱. در صورتی که $x, y \in \mathbb{C}^n$، نامساوی کوشی–شوارتز به شکل زیر قابل بیان است:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y}_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{۳.۱}$$

لم ۹.۱. نامساوی هولدر [۶]

برای هر دو بردار n بعدی x و y در $\mathbb{R}^n$ و هر $p, q \in (1, +\infty)$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|x_i y_i\right| \le \|x\|_p \|y\|_q . \tag{۴.۱}$$

[۵] Cauchy-Schwarz inequality

[۶] Hölder's inequality

اثبات. ابتدا توجه داریم که برای هر دو عدد حقیقی $\alpha \geq ۰$,$\beta \geq ۰$ و $p, q > ۱$، نابرابری زیر را که به نابرابری یونگ [۷] معروف است، داریم:

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{۵.۱}$$

حال برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، با فرض $\alpha = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ و $\beta = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$ از نامساوی فوق، خواهیم داشت:

$$\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq \frac{۱}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{۱}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

اکنون اگر نامساوی‌های بالا را روی i جمع ببندیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=۱}^{n}|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} &\leq \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{|x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|y\|_q^q}\right) \\
&= \frac{۱}{p\|x\|_p^p}\sum_{i=۱}^{n}|x_i|^p + \frac{۱}{q\|y\|_q^q}\sum_{i=۱}^{n}|y_i|^q \\
&= \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} \\
&= ۱
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n}|x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=۱}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}\left(\sum_{i=۱}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}}.$$

■

نکته ۱.۱۰. اگر در نامساوی هولدر قرار دهیم: $p = q = ۲$، نامساوی کوشی‌ـ‌شوارتز حاصل می‌شود.

تعریف ۱.۱۱. دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=۱}^{\infty}$ از بردارها در $\mathbb{C}^n$ را نسبت به نرم $\|\cdot\|$ همگرا به بردار $x \in \mathbb{C}^n$ گوییم، هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$ عدد صحیحی مانند $N(\epsilon)$ یافت شود، به‌طوری که برای هر $k \geq N(\epsilon)$ داشته باشیم:

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \epsilon.$$

[۷] Young's inequality

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x,$$

یا به طور معادل

$$\|x^k - x\| \to \circ.$$

قضیه ۱۲.۱. هر نرم برداری، تابعی پیوسته از مؤلفه‌های بردار $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T$ است.

اثبات. فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم برداری دلخواه و $\{x^{(k)}\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از بردارها در $\mathbb{C}^n$ باشد که به بردار $x \in \mathbb{C}^n$ همگراست. با توجه به تمرین (۲۰.۱) برای هر $k = ۱, ۲, \dots$، داریم:

$$\circ \leq \big|\|x^{(k)}\| - \|x\|\big| \leq \|x^{(k)} - x\|.$$

چون $x^k \to x$، پس $\|x^k - x\| \to \circ$. بنابراین از قضیه فشردگی نتیجه می شود:

$$\big|\|x^{(k)}\| - \|x\|\big| \to \circ,$$

و یا

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}\| = \|x\|.$$

■

تعریف ۱۳.۱. هم‌ارزی نرم‌های برداری

جفت نرم برداری $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ را معادل یا هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$، هرگاه اعداد ثابت و مثبت m و M موجود باشند، به قسمی که برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$m\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq M\|\cdot\|. \tag{۶.۱}$$

مثال ۱۴.۱. نرم‌های l^p و l^∞ هم‌ارزند؛ زیرا با فرض $x = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ و

$$|x_k| = \max_{۱\leq i\leq n} |x_i|,\ (۱ \leq k \leq n),$$

داریم:

$$|x_k| = \left(|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}|x_k|,$$

که از آن هم نتیجه می‌شود:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty.$$

قضیه ۱.۱۵. نرم‌های برداری روی $\mathbb{C}^n$ هم‌ارز هستند.

اثبات. جفت نرم برداری $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ را روی $\mathbb{C}^n$ در نظر می‌گیریم و برای راحتی کار یکی از آنها را نرم بی‌نهایت اختیار می کنیم (زیرا می‌توان نشان داد که هرگاه دو نرم دلخواه با نرم بی نهایت در رابطه هم‌ارزی (۱.۶) صدق کنند، آنگاه دو نرم دلخواه نیز در رابطه نظیر صدق خواهند کرد).

اکنون مجموعه S را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \left\{x : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_\infty = 1\right\} \subset \mathbb{C}^n.$$

S یک مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{C}^n$ است (چرا؟) و چون $\|x\|$ یک تابع پیوسته روی S است، پس بر طبق قضیه وایرشتراس، مقدار می‌نیمم و ماکزیمم خود را در نقاطی مانند x_0 و x_1 از S اختیار می‌کند به‌طوری که

$$\|x_0\| = \min_{x\in S}\|x\|, \quad \|x_1\| = \min_{x\in S}\|x\|.$$

در نتیجه

$$\forall x \in S,\ \|x_0\| \leq \|x\| \leq \|x_1\|.$$

از طرفی، برای هر بردار دلخواه $y \neq 0$ در $\mathbb{C}^n$، بردار $\frac{y}{\|y\|_\infty}$ متعلق به S است. بنابراین داریم:

$$\|x_0\| \leq \frac{\|y\|}{\|y\|_\infty} \leq \|x_1\|,$$