

کاربردهای آنالیز فوریه

تالیف:

هوئی پیائو شو

دانشگاه فرلی دیکنسون، نیوجرسی

ترجمه و تدوین:

دکتر آرش ثباتیان

سید مرتضی طاهری بالانجی

سید مجتبی طاهری بالانجی

شو ، هوئی پیائو..

کاربردهای آنالیز فوریه / تالیف هوئی پیائو شو ، ترجمه دکتر آرش ثباتیان، سیدمرتضی طاهری بالانجی و سید مجتبی طاهری بالانجی. -ارومیه : دانشگاه ارومیه ، ۱۳۹۵ .

۶۰۰ ص. : جدول -. (انتشارات دانشگاه ارومیه: ۲۰۲)

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۶۶۴۸-۹۱-۰

عنوان اصلی: Applied fourier analysis.

۱- آنالیز فوریه کاربردی . الف . طاهری بالانجی ، سید مرتضی، مترجم. ب. طاهری بالانجی ، سید مجتبی ، مترجم ج. عنوان. س . فروست.

شماره ملی: ۴۳۰۳۰۴۶

QA ۱۳۹۵ ، ۹ش/آ ، ۴۰۳ ،



عنوان: کاربردهای آنالیز فوریه

مولفین: هوئی پیائو شو

مترجمین: دکتر آرش ثباتیان، سیدمرتضی طاهری بالانجی و سید مجتبی طاهری بالانجی

ناشر: دانشگاه ارومیه

سال نشر: ۱۳۹۵

سری انتشارات: ۲۰۲

شمارگان: ۱۰۰۰

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۶۶۴۸-۹۱-۰

پیش‌گفتار

نظریه گرمایی ژان بابتیست ژوزف فوریه (نظریه ریاضی در مورد گرما)، روش ساده ای برای حل مسائلی با مقادیر مرزی که در انتقالات حرارتی ظاهر می شوند را ارائه می دهد. این نظریه بزرگ ریاضی توسط لرد کلوین؛ آنالیز فوریه نامیده شد، و فراتر از کاربردهای فیزیک که در آن یک اصل بود گسترش یافت. در حقیقت آنالیز فوریه به عنوان یک ابزار ضروری برای حل تقریبی هر مسئله پیچیده در فیزیک مدرن، نظریه ارتباطات، سیستم های خطی و زمینه های دیگر می باشد.

مقصود نویسنده از نوشتن این کتاب توسعه تجزیه و تحلیل فوریه کلاسیک به طور کامل و نشان دادن ارتباط بین آن و کاربردهای امروزی اش می باشد.

این کتاب برای دانشجویان ریاضی فیزیک، فیزیک و همچنین برای گرایش های مختلف مهندسی که آنالیز فوریه را به عنوان یک درس رسمی مورد مطالعه قرار می دهند و نیز تمامی دوره های مختلفی که با تکنیک فوریه در ارتباط هستند؛ نوشته شده است. این کتاب ترکیبی از مزایای هر دو کتاب درسی و کتاب بررسی می باشد. در واقع مشخصه ی کتاب بررسی، ارائه صدها مسائل حل شده کامل توسط تکنیک ها و قضایا ضروری می باشد. مسائل حل شده شامل بخشی از انتگرال های متن، شرح و تفصیل مفاهیم اساسی و گسترش تکنیک های آنالیز فوریه است. تمرینات تکمیلی فقط به عنوان تمرین ارائه نشده اند؛ بلکه برای تقویت مهارت ها و ایجاد پیش لازم به منظور استفاده عملی از تکنیک های فوریه می باشد.

تنها پیش شرط رسمی این کتاب، گذراندن یک درس هشت ساعته ترم (چهار واحد) در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می باشد، فصل هشتم تا دهم نیز با فرض آشنایی با حساب پیشرفته و ریاضیات کاربردی در نظر گرفته شده است.

سه فصل ابتدایی این کتاب با سری فوریه و مفاهیم طیف فرکانسی سروکار دارد. فصل چهارم تا ششم شامل توابع تعمیم یافته، تبدیلات فوریه و تبدیلات تعمیم یافته فوریه می باشد. فصل هفتم با همافتنگی و همبستگی سروکار دارد. سه فصل باقیمانده نیز در مورد کاربردهای آنالیز فوریه در نظریه سیگنال، سیستم های خطی، و مسائل مقادیر مرزی بحث می کند.

نویسنده نیز از دخترش دینا، که در به تحریر در آوردن این کتاب بسیار کمک حال او بوده؛ و همچنین از همسرش دیسی، کسی که او را درک کرده است و یک حامی وفادار و عامل مهم در تکمیل این کتاب بوده است؛ کمال تشکر را به عمل می آورد.

فهرست

۱	فصل ۱	سری فوریه
۱	۱-۱:	توابع متناوب
۳	۲-۱:	سری فوریه
۳	۳-۱:	خواص توابع سینوسی و کسینوسی:
۵	توابع متعامد	
۵	۴-۱:	محاسبه ی ضرایب فوریه
۹	۵-۱:	تقریب زدن توسط سری:
		فوریه متناهی
۲۲	فصل ۲	تجزیه و تحلیل توابع موجی شکل متناوب
۲۲	۱-۲:	توابع موجی شکل متناوب
۲۵	۲-۲:	ضرایب فوریه توابع:
۲۹	۳-۲:	بسط فوریه یک تابع
		در بازه ی محدود
۴۰	فصل ۳	طیف فرکانسی گسسته
۴۰	۱-۳:	شکل مختلط سری فوریه
۴۲	۲-۳:	حالت تعامدی بسط
۴۳	توابع مختلط	
۴۵	۳-۳:	طیف فرکانسی مختلط
	۴-۳:	محتوای توانی برای یک
		تابع متناوب: قضیه پارسوال
۵۴	فصل ۴	توابع تعمیم یافته
۵۴	۱-۴:	تابع ضربه ی واحد $\delta(t)$
۵۶	۲-۴:	تابع پله ای واحد $u(t)$
۵۷	۳-۴:	مشتق تعمیم یافته
	۴-۴:	مشتق تعمیم یافته برای
۵۹	یک تابع ناپیوسته	
۶۲	۵-۴:	سری فوریه مشتقات
	توابع تناوبی ناپیوسته	
۶۳	۶-۴:	محاسبه ی ضرایب فوریه
۷۵	به وسیله ی مشتق گیری	
۷۵	فصل ۵	تبدیلات فوریه
۷۵	۱-۵:	تبدیلات فوریه
۷۶	۲-۵:	خاصیت تبدیلات فوریه
۸۱	۳-۵:	قضیه های مشتق گیری
۸۲	و انتگرال گیری	
۸۳	۴-۵:	فرمول پارسوال
	۵-۵:	تبدیلات فوریه چند بعدی

۹۷	تبدیلات فوریه تعمیم یافته	فصل ۶
۹۷	۱-۶: تابع رشد آهسته	
۹۸	۲-۶: تبدیلات فوریه تعمیم یافته	
	۳-۶: تبدیلات فوریه	
۱۰۳	توابع متناوب	
۱۰۵	۴-۶: نمایش انتگرالی تابع $\delta(t)$	
۱۱۵	همبستگی و همبستگی	فصل ۷
۱۱۵	۱-۷: همبستگی	
۱۱۷	۲-۷: قضایای همبستگی	
۱۲۰	۳-۷: قضیه پارسوال	
۱۲۱	۴-۷: همبستگی توابع	
۱۲۳	۵-۷: قضیه وینر- خنیشین	
۱۳۶	کاربرد نظریه سیگنال	فصل ۸
	۱-۸: سیگنال های باند محدود	
۱۳۶	و مدت زمان محدود	
۱۳۶	۲-۸: اصل عدم قطعیت	
۱۳۷	۳-۸: قضیه نمونه گیری	
۱۴۱	۴-۸: مدولاسیون	
۱۴۳	۵-۸: متوسط توابع همبسته	
	۶-۸: متوسط طیف توانی	
۱۴۵	سیگنال های تصادفی	
۱۴۶	۷-۸: سیگنال های تصادفی و تبدیلات هیلبرت	
۱۶۱	کاربرد سیستم های خطی	فصل ۹
۱۶۱	۱-۹: سیستم های خطی	
۱۶۲	۲-۹: پاسخ ضربه واحد و عملکرد سیستم	
۱۶۴	۳-۹: عملکرد سیستم های عملیاتی	
۱۶۶	۴-۹: سیستم های علی	
۱۶۸	۵-۹: پاسخ سیگنال های تصادفی	
۱۸۴	کاربردهایی برای مسائل هایی با مقادیر مرزی	فصل ۱۰
۱۸۴	۱-۱۰: جداسازی متغیرها و سری فوریه	
۱۸۸	۲-۱۰: نوسانات	
۱۹۴	۳-۱۰: هدایت گرمایی	
۱۹۷	۴-۱۰: نظریه پتانسیل	
۲۱۴	امتحان نهایی	
۲۱۷	پیوست الف سه شکل مختلف سری فوریه	
۲۱۷	پیوست ب خلاصه شرایط تقارنی	
۲۱۸	پیوست ج خاصیت تبدیل فوریه	
۲۲۰	پیوست د لیست نمادها	

۱ سری فوریه

این فصل شامل

- ☐ توابع متناوب
- ☐ سری فوریه
- ☐ خواص توابع سینوسی و کسینوس: توابع متعامد
- ☐ محاسبه ضرایب فوریه
- ☐ تقریب زدن توسط سری فوریه متناهی (کران دار)

۱-۱ توابع متناوب

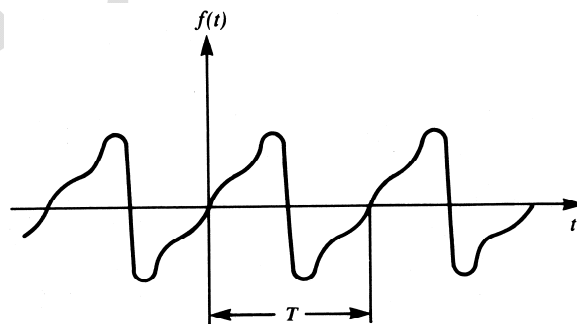
یک تابع متناوب به شکل زیر تعریف می شود

$$f(t) = f(t + T) \quad (1-1)$$

به کمترین مقدار T که در رابطه (۱-۱) صدق کند، دوره یا تناوب آن تابع گویند. با تکرار رابطه (۱-۱) می توان مشاهده کرد که:

$$f(x) = f(x + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-1)$$

به عنوان مثال، نمونه ای از یک تابع متناوب در شکل (۱-۱) نشان داده شده است؛ مقدار ثابت این تابع تناوبی با دوره یا تناوب T بوده که برای هر مقدار T تکرار می شود.



شکل ۱-۱ یک تابع متناوب

مثال ۱،۱: دوره تناوبی تابع $f(x) = \cos 2x$ را حساب کنید.

حل: با توجه به رابطه مثلثاتی زیر

$$\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta \cos 2\pi m - \sin \theta \sin 2\pi m$$

از آنجایی که به ازای m های صحیح $\cos(\pi m) = 1$ و $\sin(\pi m) = 0$ می باشد. پس $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$ خواهد بود. از این رو با توجه به رابطه (۱-۱) و با توجه به اینکه $\cos \theta$ یک تابع متناوب با دوره 2π است پس به ازای $m=1$ ، کمترین مقدار $2\pi m$ برابر 2π خواهد بود، حال

$$\cos 2(t + T) = \cos 2t$$

یا

$$\cos(2t + 2T) = \cos 2t$$

با توجه به این که برای هر مقدار صحیح m رابطه $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$ برقرار است بنابراین $2T$ باید برابر $2\pi m$ شود، در نتیجه $T = \pi m$ است. زمانی که $m=1$ باشد کمترین مقدار T حاصل می شود از این رو دوره 2π برابر π است. در حالت کلی اگر تابع متناوب به شکل

$$f(x) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

با دوره T داشته باشیم می توانیم دو مقدار صحیح m, n را بدست آوریم که به صورت

$$\omega_1 t = 2\pi m \quad \text{و} \quad \omega_2 t = 2\pi n$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{یا}$$

پس می توان نتیجه گرفت که نسبت $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ باید یک عدد گویا باشد.

مثال ۲،۱: دوره تناوب تابع $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$ را حساب کنید.

حل: با توجه به رابطه (۱-۱)

$$\cos \frac{1}{3}(t + T) + \cos \frac{1}{4}(t + T) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$$

از آن جایی که به ازاء هر مقدار صحیح m $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos \theta$ است، پس خواهیم داشت

$$\frac{1}{3}T = 2\pi m \quad \text{و} \quad \frac{1}{4}T = 2\pi n$$

که در آن m و n اعداد صحیح هستند. بنابراین $T = 6\pi m = 4\pi n$ می باشد که با قرار دادن $m = 4$ و $n = 3$ کوچکترین مقدار T بدست می آید. (این مقدار را می توان توسط آزمون - خطا بدست آورد)؛ پس کمترین مقدار T برابر 24π است.

ب. خواص توابع متناوب

اگر $f(t) = f(t + T)$ باشد به ازاء هر مقدار α, β, α داریم،

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt \quad (3-1)$$

$$\int_a^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt \quad (4-1)$$

مثال ۳،۱: درستی روابط (۳-۱) و (۴-۱) را بررسی کنید.

حل: اگر $f(t) = f(t + T)$ باشد، با فرض این که $t = \tau + T$ خواهیم داشت

$$f(\tau + T + T) = f(\tau) = f(\tau - T)$$

حال با جایگزینی T در $t = \tau$ و با استفاده از روابط بدست آمده در بالا می توان نوشت

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau - T) d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau) d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt$$

پس برای درستی رابطه (۴-۱) از سمت راست معادله داریم

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^{\cdot} f(t) dt + \int_{\cdot}^{a+T} f(t) dt$$

حال با استفاده از رابطه (۳-۱)

$$\int_a^{\cdot} f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$$

پس،

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_{a+T}^T f(t) dt + \int_{\cdot}^{a+T} f(t) dt = \int_{\cdot}^{a+T} f(t) dt + \int_{a+T}^T f(t) dt = \int_{\cdot}^T f(t) dt$$

۲-۱ سری فوریه

اگر تابع $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره T باشد، این تابع را می توان توسط سری فوریه نشان داد.

$$f(t) = \frac{1}{T} a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \dots + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \dots$$

$$= \frac{1}{T} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (۵-۱)$$

که $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ می باشد.

یک سری مثل رابطه (۵-۱) را سری مثلثاتی فوریه می نامند، که در آن a_n و b_n ضرایب فوریه تابع $f(t)$ است. سری (۵-۱) را نیز می توان به شکل زیر نوشت

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \theta_n) \quad (۶-۱)$$

از رابطه (۶-۱) می توان مشاهده کرد که نمایش سری فوریه یک تابع متناوب توصیفی از یک تابع متناوب به عنوان جمع روی مؤلفه های سینوسی و همراه با فرکانس های مختلف است. مؤلفه سینوسی با فرکانس $\omega_n = n\omega_1$ به عنوان n امین هماهنگ تابع متناوب نامیده می شود. اولین جمله این هماهنگ که برابر $\theta_1 \cos(\omega_1 t)$ است عموماً به عنوان مؤلفه اصلی نامیده می شود زیرا این جمله همان تناوب تابع $f(t)$ است، پس $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. همان فرکانس زاویه ای می باشد که $\frac{1}{T} = f$ فرکانس اصلی است؛ که ضرایب c_n و θ_n به ترتیب دامنه هماهنگ و فاز زاویه ای می باشند.

مثال ۴،۱: رابطه هماهنگ (۶-۱) را از سری مثلثاتی فوریه، رابطه (۵-۱) بدست آورید و ضرایب دامنه هماهنگ c_n و زاویه فازی θ_n را بر حسب ضرایب سری مثلثاتی فوریه a_n و b_n بیان کنید.

حل: با ضرب و تقسیم رابطه $a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$ در جمله $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ خواهیم داشت

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_1 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_1 t \right)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی می توان نتیجه گرفت که

$$a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t = c_n (\cos \theta_n \sin n\omega.t + \sin \theta_n \cos n\omega.t) \\ = c_n \cos(n\omega.t - \theta_n)$$

در حالی که

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

همچنین

$$\tan \theta_n = \frac{b_n}{a_n} \quad \text{یا} \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

پس اگر $c. = \frac{1}{T} a.$ باشد در نتیجه :

$$f(t) = \frac{1}{T} a. + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t) = c. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega.t - \theta_n)$$

۱-۳ خواص توابع سینوسی و کسینوسی: توابع متعامد

الف) تعریف متعامد بودن

مجموعه ای از توابع $\{\phi_k(t)\}$ در بازه $a < t < b$ متعامد می باشد زمانی که رابطه بین دو تابع $\phi_m(t)$ و $\phi_n(t)$ که در مجموعه $\{\phi_k(t)\}$ هستند به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ r_n & m = n \end{cases} \quad (7-1)$$

ب) روابط تعامد برای توابع سینوسی و کسینوسی

بیابید برای مثال، مجموعه ای از توابع سینوسی و کسینوسی را در نظر بگیریم که با استفاده از محاسبات حساب دیفرانسیل و انتگرال می توان نشان داد،

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega.t \, dt = 0, \quad m \neq 0 \quad (8-1 \text{ الف})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega.t \, dt = 0, \quad \text{تمام مقادیر } m \quad (8-1 \text{ ب})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega.t \cos n\omega.t \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (8-1 \text{ ج})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega.t \sin n\omega.t \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (8-1 \text{ د})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega.t \sin m\omega.t \, dt = 0, \quad \text{به ازاء تمام مقادیر } m \text{ و } n \quad (8-1 \text{ ه})$$

در حالی که $\omega = \frac{2\pi}{T}$ می باشد.

این روابط (۸-۱ الف تا ه) نشان می دهند که توابع $(\cos \omega.t, \cos 2\omega.t, \dots, \cos n\omega.t, \dots, \sin \omega.t, \sin 2\omega.t, \dots, \sin n\omega.t, \dots)$ در بازه $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ متعامد هستند.

مثال ۵،۱: درستی رابطه (۸-۱ ج) را بررسی کنید.

حل: بادر نظر گرفتن اتحاد مثلثاتی زیر

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\omega.t \Big|_{t = \frac{\pm T}{r}} = \frac{r\pi}{T} \left(\frac{\pm T}{r} \right) = \pm \pi$$

و

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-T/r}^{T/r} \cos m\omega.t \cos n\omega.t \, dt &= \frac{1}{r} \int_{-T/r}^{T/r} \{ \cos[(m+n)\omega.t] + \cos[(m-n)\omega.t] \} \, dt \\ &= \frac{1}{r} \times \frac{1}{(m+n)\omega.} \sin[(m+n)\omega.t] \Big|_{-T/r}^{T/r} \\ &\quad + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(m-n)\omega.} \sin[(m-n)\omega.t] \Big|_{-T/r}^{T/r} \\ &= \frac{1}{r} \times \frac{1}{(m+n)\omega.} \{ \sin[(m+n)T] + \sin[(m+n)T] \} \\ &\quad + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(m-n)\omega.} \{ \sin[(m-n)T] + \sin[(m-n)T] \} \\ &= 0 \quad \text{اگر } m \neq n \end{aligned}$$

در حالی که برای تمام مقادیر صحیح k داریم $\sin k\pi = 0$

اگر $m = n \neq 0$ باشد با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-T/r}^{T/r} \cos m\omega.t \cos n\omega.t \, dt &= \int_{-T/r}^{T/r} \cos^2 m\omega.t \, dt \\ &= \int_{-T/r}^{T/r} \frac{1}{2} (1 + \cos 2m\omega.t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} t \Big|_{-T/r}^{T/r} + \frac{1}{4m\omega.} \sin(2m\omega.t) \Big|_{-T/r}^{T/r} \\ &= \frac{T}{2} \end{aligned}$$

۴-۱ محاسبه ضرایب فوریه

با استفاده از روابط تعامدی (۸-۱ الف تا ه) می توان ضرایب a_n و b_n را که در سری فوریه رابطه (۵-۱)،

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

را محاسبه کرد.

$$a_n = \frac{r}{T} \int_{-T/r}^{T/r} f(t) \cos(n\omega.t) \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9-1)$$

$$b_n = \frac{r}{T} \int_{-T/r}^{T/r} f(t) \sin(n\omega.t) \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10-1)$$

$$\frac{1}{r} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/r}^{T/r} f(t) \, dt \quad (11-1)$$

مثال ۶،۱: درستی روابط (۹-۱) - (۱۱-۱) را تحقیق کنید.

حل: با ضرب جمله $\cos m\omega.t$ در دو طرف رابطه (۵-۱) و با انتگرال گیری در بازه $(-T/2, T/2)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega.t) dt &= \frac{1}{T} a. \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega.t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega.t) \right] \cos(m\omega.t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega.t) \right] \cos(m\omega.t) dt \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن روابط تعامدی (۸-۱ الف، ج، ه) خواهیم داشت:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega.t) dt = \frac{T}{T} a_m$$

در نتیجه

$$a_m = \frac{T}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega.t) dt \quad (۱۲-۱)$$

به طور مشابه اگر جمله $\sin m\omega.t$ را در رابطه (۵-۱) ضرب کرده و از تک تک جملات در بازه ی $\left(\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ انتگرال بگیریم،

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega.t) dt &= \frac{1}{T} a. \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega.t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega.t) \sin(m\omega.t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega.t) \sin(m\omega.t) dt \end{aligned}$$

حال نیز با توجه به روابط تعامد (۸-۱ ب، ج، ه) داریم

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega.t) dt = \frac{T}{T} b_m$$

بنابراین

$$b_m = \frac{T}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega.t) dt \quad (۱۳-۱)$$

با انتگرال گیری رابطه (۵-۱) در بازه $(-T/2, T/2)$ و با استفاده از روابط (۸-۱ الف، ب) می توان نوشت،

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{T} a. \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t) \right] dt \\ &= \frac{1}{T} a. T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega.t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega.t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} a \cdot T$$

در نتیجه،

$$\frac{1}{T} a = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

یا

$$a = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (14-1)$$

توجه داشته باشید که $\frac{a_1}{2}$ مقدار میانگین تابع $f(t)$ در دوره ی تناوبش است.

رابطه (۱۴-۱) نیز رابطه (۹-۱) را نیز نشان می دهد که در آن ضرایب سری کسینوسی محاسبه شده است، ضریب a_1 را نیز به دقت به دست می آورد چون $1 = \cos m\omega \cdot t \Big|_m = 1$ است.

با تعویض m به n می توان روابط (۱۲-۱) و همچنین (۱۳-۱) را به صورت زیر باز نویسی کرد،

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega \cdot t dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

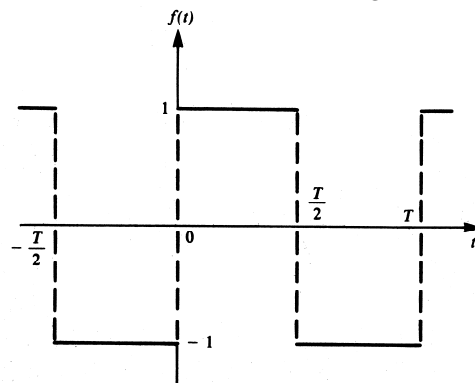
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega \cdot t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

در حالت کلی مقارن بودن بازه ی انتگرال گیری حول مبدأ ضروری نیست. با در نظر گرفتن رابطه (۴-۱)، تنها شرط لازم، انتگرال گیری در بازه ی یک دوره ی تناوب کامل است.

مثال ۷،۱: سری فوریه تابع $f(t)$ که به صورت زیر معرفی شده است را حساب کنید.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & T/2 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < T/2 \end{cases}$$

و $f(t) = f(t + T)$ که به صورت شکل (۲-۱) نشان داده شده است.



شکل ۲-۱

حل: از رابطه (۹-۱) و $\omega \cdot t \Big|_{\pm \frac{T}{2}} = \frac{2\pi}{T} \left(\pm \frac{T}{2} \right) = \pm \pi$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\tau}{T} \int_{-T/\tau}^{T/\tau} f(t) \cos(n\omega.t) dt \\
 &= \frac{\tau}{T} \left[\int_{-T/\tau}^{\cdot} \cos(n\omega.t) dt + \int_{\cdot}^{T/\tau} \cos(n\omega.t) dt \right] \\
 &= \frac{\tau}{T} \left(\frac{1}{n\omega} \sin n\omega.t \Big|_{-T/\tau}^{\cdot} + \frac{1}{n\omega} \sin n\omega.t \Big|_{\cdot}^{T/\tau} \right) \\
 &= \frac{\tau}{T} \left\{ \frac{1}{n\omega} [\sin(\cdot) - \sin(-n\pi)] + \frac{1}{n\omega} [\sin(n\pi) - \sin(\cdot)] \right\} \\
 &= \cdot \quad n \neq \cdot
 \end{aligned}$$

می دانیم $\sin(\cdot) = \sin(n\pi) = \cdot$ برای $n = \cdot$ از معادله (۱۱-۱) می توان نوشت

$$\frac{1}{\tau} a_{\cdot} = \frac{1}{T} \int_{-T/\tau}^{T/\tau} f(t) dt = \cdot$$

و نیز می دانیم که مقدار میانگین تابع $f(t)$ در دوره ی تناوبی برابر صفر است پس از رابطه (۱۰-۱) و $\omega.T = \frac{\tau\pi}{T} T = \tau\pi$ داریم:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{\tau}{T} \int_{-T/\tau}^{T/\tau} f(t) \sin n\omega.t dt \\
 &= \frac{\tau}{T} \left[\int_{-T/\tau}^{\cdot} \sin(n\omega.t) dt + \int_{\cdot}^{T/\tau} \sin(n\omega.t) dt \right] \\
 &= \frac{\tau}{T} \left(\frac{1}{n\omega} \cos n\omega.t \Big|_{-T/\tau}^{\cdot} + \frac{1}{n\omega} \cos n\omega.t \Big|_{\cdot}^{T/\tau} \right) \\
 &= \frac{\tau}{n\omega.T} \{ [\cos(\cdot) - \cos(n\pi)] + [\cos(n\pi) - \cos(\cdot)] \} \\
 &= \frac{\tau}{n\pi} [\cos n\pi]
 \end{aligned}$$

چون $\cos n\pi = (-1)^n$

$$b_n = \begin{cases} \cdot, & n \text{ زوج} \\ \frac{\tau}{n\pi}, & n \text{ فرد} \end{cases}$$

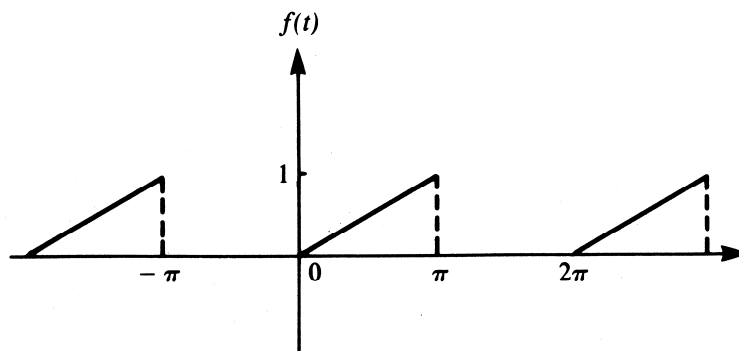
در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{\tau}{\pi} \sum_{n=\text{فرد}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega.t) \\
 &= \frac{\tau}{\pi} \left[\sin(\omega.t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega.t) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

مثال ۸،۱: سری فوريه تابع $f(t)$ که به صورت زیر بیان شده است را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} \cdot, & \pi < t < \cdot \\ \frac{1}{\pi} t, & \cdot < t < \pi \end{cases}$$

که در آن $f(t) = f(t + T)$ و در شکل (۳-۱) نیز نمایش داده شده است.



شکل ۳-۱

حل: اگر $T = 2\pi$ و $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ باشد از رابطه (۹-۱) داریم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) \Big|_{\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{\pi}^{\pi} \sin(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[\cos(nt) \Big|_{\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

بنابراین:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ زوج} \\ \frac{2}{n^2 \pi^2}, & n \text{ فرد} \end{cases}$$

از رابطه (۱۰-۱) داریم،

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{t}{n} \cos(nt) \Big|_{\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{1}{n\pi} (-1)^n \end{aligned}$$

از رابطه (۱۱-۱) داریم،

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t dt = \frac{1}{4}$$

در نتیجه:

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sin nt$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \dots \right)$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right)$$

۵-۱ تقریب توسط سری فوریه متناهی (کران دار)

الف. مقدار میانگین مربع ای خطا

اگر

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (15-1)$$

که جمع روی اولین $(k+1)$ جمله سری فوریه تابع $f(t)$ در بازه $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ است.

پس

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) + \varepsilon_k(t) \quad (16-1)$$

$$\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t) \quad (17-1)$$

بطوریکه $\varepsilon_k(t)$ اختلاف یا خطای بین $f(t)$ و تقریب آن است، پس مقدار میانگین مربع ای خطا که با E_k نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف :

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\varepsilon_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \quad (18-1)$$

و نیز E_k به صورت زیر تعریف می شود.

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \quad (19-1)$$

مثال ۹،۱: اگر بتوانیم یک تابع مثل $f(t)$ را با سری فوریه متناهی S_k تقریب بزنیم، آنگاه نشان دهید که این تقریب مقدار احتمال میانگین مربع ای خطا را خواهد داشت.

حل: با جایگزینی رابطه (۱۵-۱) در رابطه (۱۸-۱)

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt \quad (20-1)$$

فرض کنیم که E_k تابع ای از a ، a_n و b_n است. پس برای داشتن کمترین مقدار میانگین مربعی خطا E_k ، مشتقات جزئی آن نسبت به a ، a_n و b_n باید صفر باشد.

$$\frac{\partial E_k}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

با جابجایی ترتیب مشتق گیری و انتگرال گیری داریم،

$$\frac{\partial E_k}{\partial a} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a}{2} \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t) \right] dt \quad (21-1)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a}{2} \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t) \right] \cos(n\omega.t) dt \quad (22-1)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(t) - \frac{a}{2} \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t) \right] \sin(n\omega.t) dt \quad (23-1)$$

با استفاده از خواص تعامدی (۸-۱) و در نظر گرفتن روابط (۹-۱) تا (۱۱-۱)، انتگرال های روابط (۲۱-۱) تا (۲۳-۱) به صورت زیر خلاصه می شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial a} &= \frac{a}{2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \\ \frac{\partial E_k}{\partial a_n} &= \frac{a}{2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega.t) dt = 0 \\ \frac{\partial E_k}{\partial b_n} &= \frac{a}{2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega.t) dt = 0 \end{aligned}$$

مثال ۱۰،۱: درستی رابطه (۹-۱) را تحقیق کنید.

حل: از رابطه (۱۸-۱) داریم،

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - s_k(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{ [f(t)]^2 - 2f(t)S_k(t) + [S_k(t)]^2 \} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_k(t)]^2 dt \end{aligned} \quad (24-1)$$

حال

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt &= \frac{2}{T} \frac{a}{2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k a_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega.t) dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega.t) dt \end{aligned}$$

بدر نظر گرفتن روابط (۹-۱) و (۱۰-۱)،

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) \quad (25-1)$$

با استفاده از روابط تعامدی (۸-۱)،

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_k(t)]^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t) \right]^2 dt \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (26-1)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵-۱) و (۲۶-۱) در رابطه (۲۴-۱) داریم،

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

ب. اتحاد پارسوال

اگر a_n و b_n ضرایب بسط فوریه تابع متناوب $f(t)$ با دوره ی تناوبی T باشد، پس

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (27-1)$$

که در رابطه بالا به عنوان اتحاد پارسوال شناخته می شود.

مثال ۱۱.۱: از تعریف رابطه (۱۸-۱) مقدار میانگین مربعی خطای E_k که عبارتی غیر منفی (مثبت) می باشد و از رابطه (۱۹-۱) داریم:

$$E_{k+1} = E_k + \frac{1}{2} |a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2| \quad (28-1)$$

بنابراین، دنباله $\{E_k\}$ فقط شامل جملاتی غیر منفی و غیر افزایشی می باشد، همچنین این دنباله همگرا است. از رابطه (۱۷-۱)،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k(t) = f(t) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \cdot$$

بنابراین

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \cdot$$

در نتیجه از رابطه (۱۹-۱) داریم،

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

خلاصه

۱. تابع $f(t)$ اگر به صورت $f(t) = f(t + T)$ تعریف شود، تابع متناوب نام دارد و به کمترین مقدار T دوره ی تناوب آن گویند.

۲. تابع تناوبی $f(t)$ را می توان توسط سری فوریه مثلثاتی نمایش داد

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

یا

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

در حالی که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است.

۳. ضرایب سری فوریه با استفاده از خواص تعامدی سینوس و کسینوس در دوره ی تناوب شان پیدا می شوند.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \begin{Bmatrix} \cos n\omega_0 t \\ \sin n\omega_0 t \end{Bmatrix} dt \\ c_0 &= \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \end{aligned}$$

۴. مجموعه ای از توابع $\{\phi_k(t)\}$ در بازه $a < t < b$ زمانی متعامد نامیده می شود که برای دو تابع $\phi_m(t)$ و $\phi_n(t)$ در این

مجموعه رابطه

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

برقرار باشد. توابع $(1, \cos \omega, t, \cos 2\omega, t, \dots, \cos n\omega, t, \dots, \sin \omega, t, \sin 2\omega, t, \dots, \sin n\omega, t, \dots)$ در بازه $0 < t < \frac{T}{2}$ مجموعه ای از توابع متعامد هستند.

۵. اگر $f(t)$ تقریبی از سری فوریه متناهی $S_K(t)$ باشد، این تقریب کمترین مقدار میانگین مربعی خطا را خواهد داشت.

افزایش معلومات

حال شما میتوانید توضیح دهید که.....؟

- ☐ تابع تناوبی چیست و چگونه دوره تناوب آن را می توان تشخیص داد.
- ☐ خواص تعامدی توابع سینوسی و کسینوس در دوره ی تناوب شان چیست.
- ☐ چرا ضریب ثابت بسط سری فوریه $f(t)$ برابر مقدار میانگین $f(t)$ در دوره ی تناوبش است.
- ☐ چرا بازه انتگرال گیری احتیاجی به متقارن بودن حول نقطه محاسبه ضرایب سری فوریه ندارد و چرا تنها نیاز به انتگرال گیری در دوره تناوبی است.

مسائل حل شده

توابع متناوب

مسئله ۱: دوره ی تناوبی تابع $f(t) = (1 + \cos t)^2$ را حساب کنید.

حل: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ می توان نوشت

$$f(t) = (1 + \cos t)^2 = 1 + 2\cos t + \cos^2 t = 1 + 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) = \frac{3}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t$$

از آنجایی که ضریب ثابت برای تابع تناوبی با دوره ی تناوبی T هر مقداری از T است، پس دوره ی تناوب $\cos 2t$ برابر π می باشد در نتیجه دوره ی تناوب $f(t)$ برابر π خواهد بود.

مسئله ۲: آیا تابع $f(t) = \cos 10t + \cos(10 + \pi)t$ یک تابع متناوب است.

حل: در این مسئله $\omega_1 = 10$ و $\omega_2 = 10 + \pi$ است، بنابراین $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi}$ که این مقدار یک عدد گویا نمی باشد در نتیجه نمی توان یک

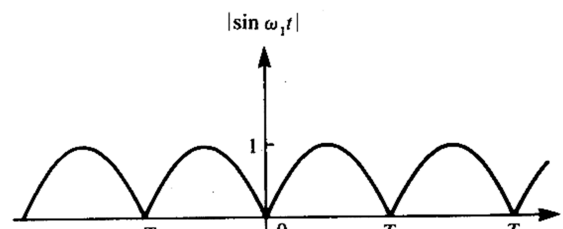
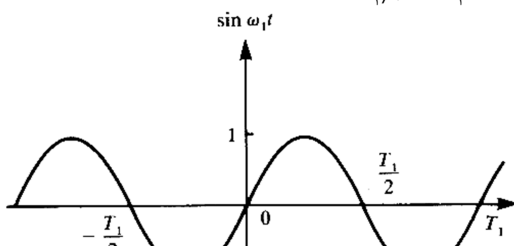
مقدار T پیدا کرد که در رابطه $f(t) = f(t + T)$ صدق کند، بنابراین $f(t)$ یک تابع متناوب نمی باشد.

مسئله ۳: دوره ی و فرکانس زاویه ای اصلی تابع $f(t) = |\sin \omega_1 t|$ را بیابید در حالی که $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ و T_1 دوره ی تناوبی

تابع $\sin \omega_1 t$ می باشند.

حل: $\sin \omega_1 t$ و $|\sin \omega_1 t|$ به ترتیب در شکل (۱-۴) و (۲-۴) رسم شده اند. پس می توان مشاهده کرد که دوره ی تناوب

$f(t) = |\sin \omega_1 t|$ برابر $\frac{T_1}{2}$ است و فرکانس زاویه ای اصلی آن نیز برابر $2\omega_1 = \frac{4\pi}{T_1}$ می باشد.



(ب)

(الف)

شکل ۱-۴

مسئله ۴،۱: اگر داشته باشیم $f(t) = f(t + T)$ و $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = a$ ، در حالی که $F(t) = \int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau$ ، نشان دهید که $F(t) = F(t + T)$.
حل: از آنجایی که

$$F(t) = \int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} a \cdot t$$

است پس،

$$F(t + T) = \int_{-T/2}^{t+T} f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} a \cdot (t + T) = \int_{-T/2}^T f(\tau) d\tau + \int_T^{t+T} f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} a \cdot T + \frac{1}{T} a \cdot t$$

با توجه به رابطه (۳-۱) و (۴-۱) داریم،

$$\int_{-T/2}^T f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} a \cdot T$$

$$\int_T^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau$$

بنابراین،

$$F(t + T) = \frac{1}{T} a \cdot T + \int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} a \cdot T + \frac{1}{T} a \cdot t = F(t)$$

مسئله ۵،۱: اگر داشته باشیم $f(t) = f(t + T)$ و $g(t) = \int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau$ ، نشان دهید که

$$g(t) = g(t + T)$$

اگر $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$ باشد.

حل: چون $g(t) = \int_{-T/2}^t f(\tau) d\tau$ ،

$$g(t + T) = \int_{-T/2}^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^T f(\tau) d\tau + \int_T^{t+T} f(\tau) d\tau$$

از روابط (۳-۱) و (۴-۱)،

$$\int_{-T/2}^T f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \int_T^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^t f(t) dt$$

بنابراین،

$$g(t+T) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \int_t^T f(t) dt$$

و $g(t+T) = g(t)$ اگر $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$ باشد.

توابع متعامد

مسئله ۱، ۶: درستی رابطه $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega, t) \cos(n\omega, t) dt = 0$ برای تمام مقادیر m و n رابطه (۱-۸) را بررسی کنید.

حل: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$ می توان نوشت،

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega, t) \cos(n\omega, t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\sin[(m+n)\omega, t] \cos[(m-n)\omega, t]\} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{-1}{(m+n)\omega} \cos[(m+n)\omega, t] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{(m-n)\omega} \cos[(m-n)\omega, t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= 0 \quad m \neq n \end{aligned}$$

اگر $m = n \neq 0$ باشد، با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ نیز میتوان نوشت

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega, t) \cos(n\omega, t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega, t) \cos(m\omega, t) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2m\omega, t) dt \\ &= \frac{1}{2m\omega} \cos(2m\omega, t) \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

قطعا برای $m = n = 0$ مقدار انتگرال برابر صفر است.

مسئله ۱، ۷: مجموعه ای از توابع حقیقی نامحدود، $\{\phi_n(t)\}$ ؛ به ازا $n=1, 2, \dots$ ، یک تابع متعامد در مجموعه بازه (a, b) نامیده می شود اگر در

رابطه تعامدی $\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \delta_{mn}$ صدق کند؛ در حالی که δ_{mn} به عنوان دلتای کرو نوکر به شکل زیر تعریف می شود،

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

با در نظر گرفتن $f(t)$ به عنوان یک تابع که در بازه (a, b) تعریف شده است و با فرض اینکه $f(t)$ را می توان به شکل زیر

$$f(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_n \phi_n(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

که آن نیز در بازه (a, b) تعریف شده است نمایش داد. c_n ضرایب ثابت هستند،

$$c_n = \int_a^b f(t) \phi_n(t) dt$$

حل: با ضرب $f(t)$ در $\phi_m(t)$ و انتگرال گیری در بازه (a, b) داریم،

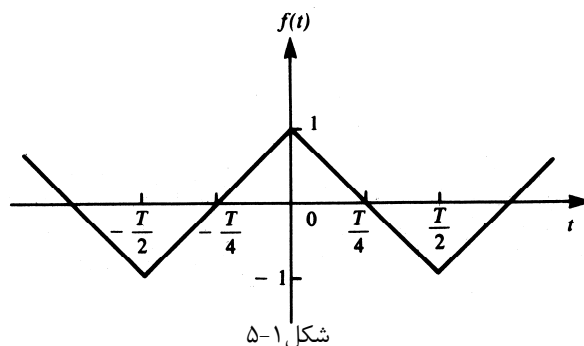
$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \phi_m(t) dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \right] \phi_m(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m \end{aligned}$$

با تعویض m به n داریم:

$$c_n = \int_a^b f(t) \phi_n(t) dt$$

محاسبه ی ضرایب فوریه

مسئله ۸،۱: سری فوریه تابع موجی شکل که در شکل (۵-۱) رسم شده است را بیابید.



حل: با نوشتن معادله تحلیلی تابع $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{T}{4} \\ 1 - \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{4} \leq t < 0 \\ -1 + \frac{4t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -1 - \frac{4t}{T}, & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

و از آنجایی که مقدار میانگین تابع $f(t)$ در دوره ی تناوبش برابر صفر است،

$$\frac{1}{T} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$$

و از رابطه (۹-۱)،

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} \left(1 + \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/4}^0 \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^{T/4} \left(-1 + \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_{T/4}^{T/2} \left(-1 - \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt \end{aligned}$$

اولین انتگرال سمت راست تساوی، برابر صفر می باشد.

با در نظر گرفتن $\tau = t$ در دومین امتگرال داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} \left(1 + \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/4}^0 \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/4}^0 \tau \cos(n\omega \tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_0^{T/4} t \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/4}^0 \tau \cos(n\omega \tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_0^{T/4} t \cos(n\omega t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T^r} \int_0^{T/r} t \cos(n\omega, t) dt$$

حال با انتگرال گیری جزء به جزء داریم،

$$\begin{aligned} \int_0^{T/r} t \cos(n\omega, t) dt &= \frac{1}{n\omega} t \sin(n\omega, t) \Big|_0^{T/r} - \frac{1}{n\omega} \int_0^{T/r} \sin(n\omega, t) dt \\ &= \frac{1}{(n\omega)^r} \cos(n\omega, t) \Big|_0^{T/r} \\ &= \frac{1}{(n^r \pi / T)^r} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T^r} \frac{1}{(n^r \pi / T)^r} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{1}{n^r \pi^r} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

چون $\cos(n\pi) = (-1)^n$ است؛

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n^r \pi^r}, & n \text{ فرد} \end{cases}$$

به طور مشابه از رابطه (۱۰-۱) داریم،

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/r}^{T/r} f(t) \sin(n\omega, t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/r}^{T/r} \sin(n\omega, t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/r}^0 \frac{t}{T} \sin(n\omega, t) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/r} \frac{t}{T} \sin(n\omega, t) dt \\ &= \frac{1}{T^r} \int_{-T/r}^0 (-\tau) \sin[n\omega, (-\tau)] (-d\tau) + \frac{1}{T^r} \int_0^{T/r} t \sin(n\omega, t) dt \\ &= \frac{1}{T^r} \int_0^{T/r} t \sin(n\omega, t) dt - \frac{1}{T^r} \int_0^{T/r} t \sin(n\omega, t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

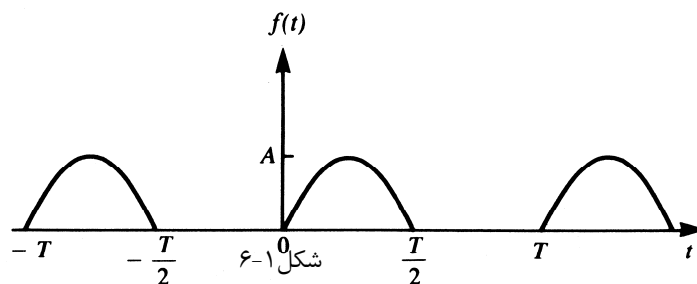
بنابراین،

$$f(t) = \frac{1}{\pi^r} \left(\cos \omega, t + \frac{1}{r^r} \cos r\omega, t + \frac{1}{\delta^r} \cos \delta\omega, t \right)$$

مسئله ۹،۱: سری فوریه تابع $f(t)$ که به صورت

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{r} < t < 0 \\ A \sin \omega, t, & 0 < t < \frac{T}{r} \end{cases}$$

و $\omega = 2\pi/T$ ، $f(t+T) = f(t)$ می باشد و نیز در شکل (۶-۱) نمایش داده شده است را بیابید.



حل: زمانی که $0 < t < T/2$ باشد $f(t) = A \sin(2\pi t/T)$ است. از رابطه (۱۴-۱) و (۹-۱) داریم،

$$a_1 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(\omega t) dt = \frac{A}{T\omega} \left(-\cos \omega t \right) \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{A}{\pi} (1 - \cos \pi)$$

$$= \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(\omega t) \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{ \sin[(1+n)\omega t] + \sin[(1-n)\omega t] \} dt$$

زمانی که $n = 1$ باشد،

$$a_1 = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(2\omega t) dt = \frac{A}{2\pi} \left(-\frac{1}{2\omega} \cos 2\omega t \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{2\pi} [1 - \cos 2\pi]$$

$$= \frac{A}{2\pi} (1 - 1)$$

$$= 0$$

زمانی که $n = 2, 3, \dots$ باشد،

$$a_n = \frac{A}{T} \left\{ \frac{\cos[(1+n)\omega t]}{(1+n)\omega} - \frac{\cos[(1-n)\omega t]}{(1-n)\omega} \right\} \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1 - \cos[(1+n)\pi]}{(1+n)} + \frac{1 + \cos[(1-n)\pi]}{(1-n)} \right\}$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ فرد} \\ \frac{A}{2\pi} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{1-n} \right), & n \text{ زوج} \end{cases}$$

به طور مشابه، از رابطه (۱۰-۱) داریم

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt$$

$$= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \{ \cos[(1-n)\omega.t] - \cos[(1+n)\omega.t] \} dt$$

زمانی که $n = 1$ باشد،

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{T} \left\{ \frac{\sin[(1-n)\omega.t]}{(1-n)\omega} - \frac{\sin[(1+n)\omega.t]}{(1+n)\omega} \right\} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(1-n)\pi]}{(1-n)} - \frac{\sin[(1+n)\pi]}{(1+n)} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega.t - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{(1)(3)} \cos \omega.t + \frac{1}{(3)(5)} \cos 3\omega.t + \dots \right)$$

مسئله ۱۰،۱: بسط سری فوری $f(t) = \sin^5 t$ را بیابید.

حل: علاوه بر راه حل مسئله ۹،۱، باید از اتحاد زیر نیز استفاده کنیم،

$$\begin{aligned} e^{\pm i n \theta} &= \cos n\theta \pm i \sin n\theta \\ \cos n\theta &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin n\theta &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{aligned}$$

خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \sin^5 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i} (e^{i5t} - 5e^{i3t} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-i3t} - e^{-i5t}) \\ &= \frac{5}{8} \sin t - \frac{5}{16} \sin 3t + \frac{1}{16} \sin 5t \end{aligned}$$

در این جا سری فوری فقط شامل سه جمله می باشد.

تقریب زدن توسط سری فوری متناهی

مسئله ۱۱،۱: تقریب تابع $f(t)$ که به صورت

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad \pi < t < 0 \\ 0 & , \quad 0 < t < \pi \end{cases}$$

است، سری فوری متناهی با سه جمله اول را بیابید. همچنین میانگین مربعی خطا را در این تقریب محاسبه کنید.

حل: با استفاده از نتیجه مثال ۷،۱ و با در نظر گرفتن $T = 2\pi$ ، $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ ، سه جمله سری فوری تابع $f(t)$ به صورت زیر است.

$$S_\Delta(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t \right)$$

حال، با توجه به رابطه (۱-۱۹) میانگین مربعی خطا E_Δ برابر است با:

$$E_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^{\sqrt{2}}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.67$$

مسئله ۱۲،۱: درستی نامساوی زیر را که به عنوان ((نامساوی بسل)) شناخته می شود را بررسی کنید.

$$\frac{\sqrt{2}}{T} \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} [f(t)]^{\sqrt{2}} dt \geq \frac{a_{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^k (a_n^{\sqrt{2}} + b_n^{\sqrt{2}})$$

حل: از تعریف رابطه (۱۸-۱)

$$E_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_k(t)]^{\sqrt{2}} dt \geq 0$$

و از رابطه (۱۹-۱) می توان استنباط کرد که:

$$\frac{\sqrt{2}}{T} \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} [f(t)]^{\sqrt{2}} dt \geq \frac{a_{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^k (a_n^{\sqrt{2}} + b_n^{\sqrt{2}})$$

مسئله ۱۳،۱: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله ضرایب فوریه تابع $f(t)$ باشند، نشان دهید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

حل: از نتیجه مسئله (۱۲-۱) داریم،

$$\frac{a_{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^k (a_n^{\sqrt{2}} + b_n^{\sqrt{2}}) \leq \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} [f(t)]^{\sqrt{2}} dt$$

چون سری سمت چپ معادله همگرا است. پس ضرورت دارد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{\sqrt{2}} + b_n^{\sqrt{2}}) = 0$$

که این دلالت دارد بر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

مسئله ۱۴،۱: با ضرب

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\omega.t + b_n \sin n\omega.t)$$

در $f(x)$ ، و با انتگرال گیری جزء به جزء نشان دهید که

$$\frac{1}{T} \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} [f(t)]^{\sqrt{2}} dt = \frac{a_{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\sqrt{2}} + b_n^{\sqrt{2}})$$

(نکته: اثبات اتحاد پارسوال در مسئله ۱۱-۱ را به بینید)

حل: با استفاده از روابط (۹-۱) و (۱۰-۱)

$$\frac{1}{T} \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} [f(t)]^{\sqrt{2}} dt = \frac{a_{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/\sqrt{2}}^{T/\sqrt{2}} f(t) \cos(n\omega.t) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
& = \frac{1}{4} a_0 T + \frac{T}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^* + b_n^*) \right]
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

مسئله ۱۵،۱: اگر ضرایب فوریه $f(t)$ باشد با رجوع به مجموعه متعامد $\{ \phi_n(t) \}$ نشان دهید که

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

حل: از مسئله ۷-۱ داریم،

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

که می توان به صورت زیر نوشت،

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(t)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)]^2 dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(t) \right] dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta_{nm} \right]
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

مسئله ۱۶،۱: با استفاده از اتحاد پارسوال (۲۷-۱) اثبات کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

حل: اتحاد پارسوال (۲۷-۱) که داده شده است

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

حال، از مثال ۷،۱ خواهیم داشت

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t$$

با دوباره نویسی رابطه داریم،

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)\omega_0 t$$

حال

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = 1$$

بنابراین؛

$$1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

مسئله ۱۷،۱: جواب مسئله ۱۶،۱ را با بکار گیری بسط سری فوریه مسئله ۸،۱ دوباره بدست آورید.

حل: از مسئله ۸،۱ داریم،

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t \right) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\omega_1 t \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $t=0$ و $f(0)=1$ داریم؛

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

پس،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

مسائل تکمیلی

مسئله ۱۸،۱: دوره ی تناوب توابع زیر را بیابید:

الف) $\cos nt$ ، ب) $\cos 2\pi t$ ، ج) $\sin\left(\frac{2\pi t}{k}\right)$ ، د) $\sin\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right)$ ، و) $|\sin \omega_1 t|$.

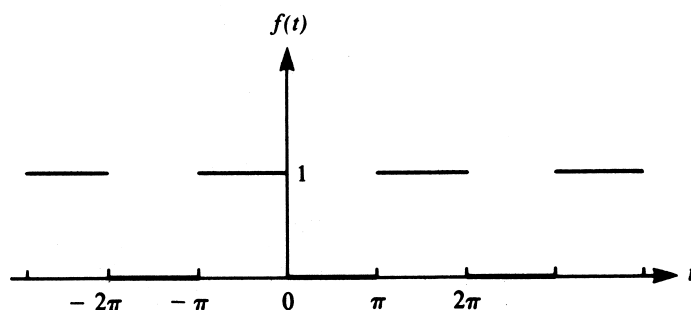
پاسخ:

الف) $\frac{2\pi}{n}$ ، ب) 1 ، ج) k ، د) 30π ، و) π/ω_1 .

مسئله ۱۹،۱: اگر $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره ی تناوبی T باشد، نشان دهید که $f(at)$ برای $a \neq 0$ یک تابع متناوب با دوره تناوبی T/a است.

مسئله ۲۰،۱: سری فوریه تابع $f(t)$ را که به صورت $f(t) = 1$ برای $0 < t < \pi$ و $f(t) = 0$ برای $\pi < t < 2\pi$ و همچنین

$f(t + 2\pi) = f(t)$ تعریف می شود را بیابید. (شکل ۷-۱)

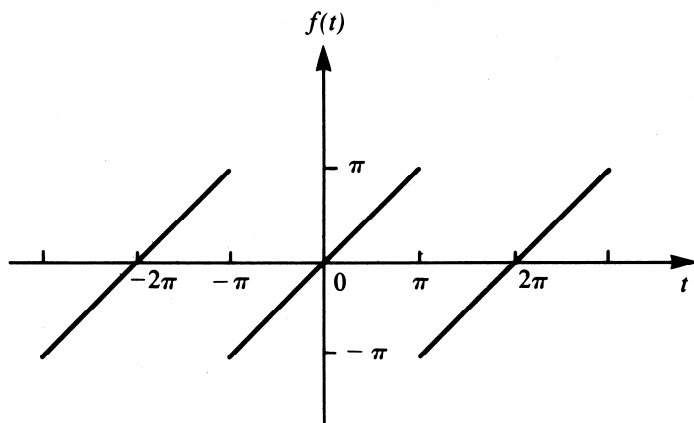


پاسخ: $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$

شکل ۷-۱

مسئله ۲۱،۱: سری فوريه تابع $f(t)$ که به صورت $f(t) = t$ در بازه $(-\pi, \pi)$ و $f(t) = f(t) + 2\pi$ تعريف مي شود را حساب كنيد.

(شکل ۸-۱)

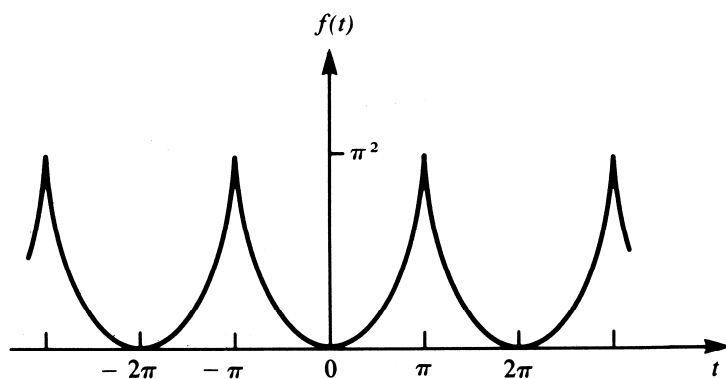


شکل ۸-۱

پاسخ: $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$

مسئله ۲۲،۱: سری فوريه تابع $f(t)$ که به صورت $f(t) = t^2$ در بازه $(-\pi, \pi)$ و $f(t) = f(t + 2\pi)$ تعريف مي شود را حساب كنيد.

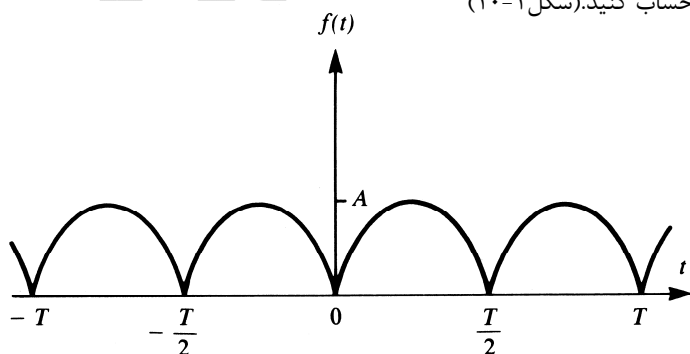
(شکل ۹-۱)



شکل ۹-۱

پاسخ: $\frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos nt$

مسئله ۲۳،۱: سری فوريه تابع $f(t) = |A \sin \omega t|$ را حساب كنيد. (شکل ۱۰-۱)



شکل ۱۰-۱

پاسخ: $\frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2n\omega t)$

مسئله ۲۴،۱: بسط سری فوریه تابع $f(t) = \sin^2 t \cos^3 t$ را بنویسید.

پاسخ: $\frac{1}{16} (2 \cos t - \cos^3 t - \cos 5t)$

مسئله ۲۵،۱: بسط سری فوریه تابع $f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \sin t)$ را حساب کنید. [تذکر: از سری توانی e^z هر گاه $z = re^{it}$ استفاده کنید]

پاسخ: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \cos nt$

مسئله ۲۶،۱: تقریب تابع $f(t) = t$ در بازه $(-\pi, \pi)$ را برای سری فوریه متناهی که شامل پنج جمله ی اول آن است را پیدا کنید و همچنین مقدار میانگین مربعی خطا را برای این تقریب محاسبه کنید.

پاسخ: $E_{\Delta} = 0.363$ ، $\sum_{n=1}^{\Delta} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt \right]$

مسئله ۲۷،۱: با استفاده از سری فوریه مثال (۷،۱) نشان دهید،

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

[تذکر: در نتیجه ی مثال ۷،۱ مقدار t را برابر $T/4 = \pi/2$ قرار دهید]

مسئله ۲۸،۱: اثبات کنید،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

[تذکر: در نتیجه مسئله ۲۲،۱ مقدار t را برابر $t = \pi$ در نظر بگیرید]

مسئله ۲۹،۱: مقدار جمع $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} \right]$ را حساب کنید. [تذکر: در نتیجه مسئله ۸،۱ مقدار t را برابر صفر در نظر بگیرید.]

پاسخ: $\pi^2/8$

مسئله ۳۰،۱: اگر $f(t)$ و $g(t)$ توابع تکه ای پیوسته با دوره ی تناوبی T باشند و همچنین a_n ، b_n و α_n ، β_n بترتیب

ضرایب فوریه توابع $f(t)$ و $g(t)$ باشند نشان دهید

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) dt = \frac{1}{T} a_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

مسئله ۳۱،۱: اگر تابع $f(t)$ در مسئله ۷،۱ را توسط $f_k(t) = \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t)$ تقریب بزنیم، نشان دهید که میانگین

مقداری کمینه خواهد بود. $\int_a^b [f(t) - f_k(t)]^2 dt$