ریاضیات برای فیزیک‌دانان

سوزان ام. لیا

ترجمه

سعید شمس، دانشیار گروه ریاضی دانشگاه ارومیه

علی عبادیان، استاد گروه ریاضی دانشگاه ارومیه

خلیل شهبازپور، استادیار گروه ریاضی دانشگاه ارومیه

سرشناسه	:	لی، سوزان ام. (Lea, Susan M)
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضیات برای فیزیکدانان/ سوزان ام. لیا؛ ترجمه: سعید شمس، علی عبادیان، خلیل شهبازپور؛ ویراستار علمی: الناز اسکویی؛ ویراستار ادبی: فاطمه مدرسی.
مشخصات نشر	:	ارومیه: انتشارات دانشگاه ارومیه، ۱۴۰۱.
مشخصات ظاهری	:	۷۷۱ ص.: مصور، نمودار.
شابک	:	۹۷۸–۶۰۰–۸۶۸۱–۹۷–۷
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	کتابنامه: ص.[۷۵۱] – ۷۵۴.
یادداشت	:	نمایه
موضوع	:	فیزیک ریاضی (Mathematical physics)
شناسه افزوده	:	شمس، سعید، ۱۳۴۰–، مترجم
شناسه افزوده	:	عبادیان، علی، ۱۳۵۰–، مترجم
شناسه افزوده	:	شهبازپور، خلیل، ۱۳۵۰–، مترجم
شناسه افزوده	:	اسکویی، الناز، ۱۳۵۷–، ویراستار علمی
شناسه افزوده	:	مدرسی، فاطمه، ویراستار ادبی
شناسه افزوده	:	انتشارات دانشگاه ارومیه
رده‌بندی کنگره	:	QC20
رده‌بندی دیویی	:	۱۵/۵۳۰
شماره‌ی کتابشناسی ملی	:	۸۷۳۶۷۹۲

مرکز انتشارات دانشگاه ارومیه

ارومیه، کیلومتر ۱۱ جاده سرو، صندوق پستی: ۱۶۵، تلفن: ۳۱۹۴۲۲۷۴– ۳۲۷۷۹۹۳۰–۰۴۴، دورنگار: ۳۲۷۷۹۹۳۰

نام کتاب	:	ریاضیات برای فیزیکدانان
ترجمه	:	سعید شمس، علی عبادیان، خلیل شهبازپور
ناشر	:	انتشارات دانشگاه ارومیه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی	:	میامی
طراحی جلد و حروف‌چینی	:	قاهر معروفی آذر (www.KaFeX.ir)
نوبت چاپ	:	اول
سال نشر	:	۱۴۰۰
شمارگان	:	۲۰۰ نسخه
قیمت پشت جلد	:	۳۰۰ ۰۰۰ تومان
شابک	:	۹۷۸–۶۰۰–۸۶۸۱–۹۷–۷

پیشگفتار مترجمین

کتاب حاضر، جزو کتاب‌های به نام در زمینه‌ی ریاضیات، فیزیک و مهندسی می‌باشد و در اکثر دانشگاه‌های آمریکا تدریس می‌شود که آن را از کتب مشابه موجود متمایز می‌سازد. با این حال، تنوع مطالب آن به حدی است که نه تنها برای تدریس در رشته‌ی ریاضی مناسب است، بلکه برای تدریس در شاخه‌های دیگر علوم بخصوص رشته‌های فیزیک و فنی که درسی در ریاضیات مهندسی دارند قابل استفاده است. نظر به اهمیت این کتاب و نیاز مبرم دانشجویان به متن فارسی این اثر ارزشمند، بر آن شدیم که به ترجمه‌ی آن اقدام نماییم. اینک با کمال افتخار ترجمه‌ی آن را تقدیم می‌داریم. در ترجمه‌ی حاضر، راه دقیق را پیش گرفته‌ایم، در برگردان مطالب دخل و تصرف نکرده‌ایم. در عین حال از شیوایی ترجمه نیز غافل نبوده‌ایم و همواره سعی کرده‌ایم رعایت امانت را با روانی مطالب درهم آمیزیم. در ضمن به ساختن واژه‌های جدید نیز نپرداخته‌ایم مگر به هنگام ناگزیری. سعی بر این بوده که از میان معادل‌های فارسی موجود، بهترینشان را برگزینیم و هر کجا به اسم دانشمندی برخورده‌ایم، املای انگلیسی آن را (فقط یک بار) در پانوشت آورده‌ایم.

محتوای کتاب به گونه‌ای است که می‌توان از فصل‌های دوم، سوم، چهارم و هفتم برای تدریس در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد درس ریاضیات مهندسی رشته‌های فنی و کشاورزی و همچنین از فصل‌های مذکور به انضمام بخشی از مباحث اختیاری (قسمت‌های الف و ب)

می‌توان برای تدریس درس ریاضی فیزیک استفاده نمود. دانشجویانی که به مسائل تئوری و محض علاقه‌مند باشند، می‌توانند برای مطالعه‌ی عمیق‌تر به برهان‌هایی که در کتاب آمده است رجوع کنند. با توجه به اینکه هر دانشجویی در قرن حاضر نیازمند استفاده استفاده از کامپیوتر است، برای اکثر مسائل و مثال‌های متنوع باری رشته‌های برق و اکترونیک که اغلب با مدارهای الکتریکی سر و کار دارند در این کتاب قابل مشاهده است. پیش‌نیازهای لازم از جمله مباحثی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، محاسبات برداری، جبر خطی و تانسورها بیان شده تا کتاب دانشجو را از رجوع به کتب دیگر بی‌نیاز سازد. این کتاب در طی سالیان متمادی به عنوان مرجعی برای تدریس در شاخه‌های مختلف علوم پایه و کاربردی توسط مترجمین مورد استفاده قرار گرفته است و مطالعه‌ی آن را برای دانشجویان و محققینی که علاقه‌مندند دانش خود را عمیق‌تر سازند پیشنهاد می‌شود. در انتهای کتاب، بخشی تحت عنوان مباحث اختیاری قرار گرفته است تا درک مطالب کتاب را برای دانشجویان تسهیل نماید.

در خاتمه لازم می‌دانیم از آقایان دکتر رسول آقالاری، دکتر شهرام نجف‌زاده و سرکار خانم دکتر الناز اسکویی که زحمت ویراستاری علمی کتاب را بر عهده داشته‌اند و از سرکار خانم دکتر فاطمه مدرسی که ویراستاری ادبی کتاب را به بهترین نحو ممکن انجام داده‌اند تشکر و قدردانی نماییم. همچنین از سرکار خانم فرزانه غلامی، مسئول انتشارات و آقای منوچهر ده بزرگی ریاست کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه برای همکاری و حمایت‌های بی‌دریغشان و آقای قاهر معروفی آذر که زحمت حروف‌چینی و تنظیم مطالب کتاب را تقبل نموده‌اند صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می‌نماییم. واضح است که این ترجمه عاری از اشتباه نبوده، لذا از هرگونه نظرات اصلاحی و انتقادات سازنده در چاپ بعدی کتاب استقبال خواهیم نمود.

دکتر علی عبادیان
دکتر سعید شمس
دکتر خلیل شهبازپور

گروه ریاضی دانشگاه ارومیه

پیشگفتار مؤلف

فلسفه: در این کتاب بزرگ فلسفه به رشته‌ی تحریر در آمده است، دنیایی که، در مقابل دیدگان ما همیشه استوار است. اما کتاب قابل فهم نیست مگر آنکه شخص در ابتدا درک زبان آن و استنباط کلمات به کار رفته در آن را فرا گیرد. این کتاب به زبان ریاضی نوشته شده است و شخصیت‌های آن عبارتند از: مثلث‌ها، دوایر و دیگر اشکال هندسی که بدون این‌ها، ذهن بشر قادر به درک حتی یک کلمه از آن نبوده و در دخمه‌ای تاریک سرگردان می‌ماند.

"گالیلو گالیله"

گفته‌های گالیله در قرن هفدهم، امروز نیز صادق است. یک دانشجوی جدی فیزیک مجبور به یادگیری زبان ریاضی است. البته این امر برای دانشجوی امروزی پیچیده‌تر از زمان گالیله است. مشخصه‌هایی شامل انتگرال، ماتریس، گروه، تانسور و غیره در زمان گالیله به گوش نمی‌خورد. متخصص فیزیک نه تنها با مکانیک که در زمان گالیله مطالعه می‌شد سروکار دارد، بلکه تئوری الکترومغناطیس، مکانیک کوانتومی و نسبیت را نیز مطالعه می‌کند. از آنجایی که سعی می‌شود مطالب زیادی در رابطه با فیزیک در دروس دانشجویان دوره‌ی کارشناسی گنجانده شود، لذا فرصتی برای مطالعه‌ی ریاضی باقی نمی‌ماند. معمولاً تلاش می‌کنیم این نیاز را با قرار دادن ساختارهای

ریاضی در کلاس‌های فیزیک با معرفی ابزارهای مورد نیاز، جبران کنیم.

یک دانشجوی ارشد مبتدی، معمولاً نیاز به ابزارهایی دارد که قبلاً به تدریج آن‌ها را جمع‌آوری نموده تا بتواند درک عمیق‌تری از نحوه‌ی کاربرد آن‌ها کسب نماید. لذا با مروری بر آن‌ها و تقویت آنچه که در دوره‌ی کارشناسی به دست آورده، می‌تواند جایگاه مطمئنی در به کارگیری ابزارهای ریاضی برای خود فراهم سازد. هدف مورد نظر این کتاب موضوع فوق می‌باشد. دانشجویی که مطالب پیش رو را مطالعه کند بایستی خود را برای کلاس‌های کارشناسی ارشد مکانیک، مکانیک کوانتومی یا الکتریسیته و مغناطیس آماده کند.

این مطالب حاصل یک دوره از کلاس‌های دانشگاه ایالتی سانفرانسیسکو می‌باشد که توسط دانشجویان سال آخر فیزیک به طور مشترک با دانشجویان ورودی ارشد جمع‌آوری شده است. این دانشجویان دروس معمول ریاضی شامل حساب دیفرانسیل و انتگرال، حساب برداری، معادلات دیفرانسیل و جبر خطی را در دوره‌ی کارشناسی گذرانیده‌اند. همچنین در سطح بالایی دروس مکانیک و الکترومغناطیس را مطالعه نموده‌اند. با اینکه این دانشجویان مطالب چند فصل ابتدایی این کتاب را دیده‌اند، اما در به کارگیری این مطالب فوق‌العاده دقیق بوده و از اعتماد به نفس کافی برخوردارند. در ایالت سانفرانسیسکو دانشجویان کارشناسی ارشد ورودی به دانشگاه که قبلاً مدرکی در فیزیک دارند در آزمون ورودی شرکت می‌کنند. این آزمون‌ها نشان می‌دهند که اغلب آن‌ها نمی‌توانند محاسبات برداری را به درستی انجام دهند، به ویژه اگر از آنان خواسته شود در مختصات دیگری غیر از دکارتی کار کنند. بنابراین فصول اولیه شامل مطالب اساسی به عنوان مطالب مروری و تکمیلی است. در عین حال این مطالب می‌توانند در وضعیت پیچیده‌تری نیز مطرح شوند. کتاب‌های فراوانی در زمینه‌ی ریاضیاتی که مورد نیاز یک دانشجوی ارشد فیزیک می‌باشد موجودند. بعضی از آن‌ها کتاب‌های مرجعی هستند که در دو جلد تعریف شده‌اند. هر دانشجویی به یکی از این کتاب‌ها، نه به عنوان یک کتاب درسی، نیاز دارد. اکثر کتاب‌های درسی حاوی مطالبی بیش از یک ترم درسی هستند، و بسیاری از آن‌ها برای دانشجویان امروزی که معمولاً از نظر آمادگی تحصیلات تکمیلی توانمند نیستند بیش از حد حاوی مطالب ثقیل ریاضی‌اند.

هدف این کتاب ارائه‌ی یک بحث کامل برای یک ترم دانشجویان فیزیک است. کتابی که

دانشجویان را به ابزاری که نیاز دارند مهیّا ساخته و به آن‌ها نشان می‌دهد که چگونه از این ابزار در مسائل فیزیک استفاده نمایند. از آنجایی که این دانشجویان تجاربی در فیزیک دارند، لذا این دانسته‌ها را در مثال‌ها و تمرینات کتاب گنجانیده‌ام. کتاب مشتمل بر هشت فصل می‌باشد و مطالبی را که هر سال تدریس کرده‌ام، پوشش می‌دهد. پنج فصل اختیاری، شامل مطالب اضافی است که مدرسان می‌توانند قسمت‌هایی از آن‌ها را انتخاب نموده و مطالعه‌ی آن‌ها را به عهده‌ی دانشجویان بگذارند. بعضی از فصول شامل مطالبی است که طبیعتاً در برنامه‌ی آموزشی دوره‌ی کارشناسی با دیدی عمیق‌تر و وسیع‌تر قرار دارد.

مدرسان ممکن است مایل باشند بعضی از این مطالب را حذف نموده یا به عنوان مطالب مورد نیاز محسوب نمایند. فصول یک (بردارها و ماتریس‌ها) و سه (معادلات دیفرانسیل) در زمره‌ی همین فصول می‌باشند. بعضی از فصول شامل مطالبی است که به طور طبیعی در برنامه‌ی درسی قبل از کارشناسی ارشد موجود نیست. فصل شش (توابع تعمیم‌یافته) و فصل هفت (تبدیلات فوریه) در این دسته قرار دارند. مباحث اختیاری در سطح بالاتری از مطالب فصول مختلف این کتاب قرار دارند. مطالب هر فصل رفته رفته مشکل‌تر می‌شوند. مدرسانی که می‌خواهند مطالب را در سطح ساده‌تری ارائه نمایند، می‌توانند بخش‌های پایانی هر فصل و همچنین مباحث اختیاری را حذف نمایند. مدرسانی که با دانشجویان قوی سروکار دارند، می‌توانند این مباحث را به عنوان مطالب مورد نیاز برای درس محسوب نموده و روی مطالب دشوار بخش‌های پایانی تمرکز نمایند.

مطالب معرفی شده در هر فصل، در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین، مطالعه‌ی فصل دو (متغیرهای مختلط) مستلزم مطالبی از بردارها (فصل یک) می‌باشد، همچنین بحث تبدیلات معکوس (فصول پنج و هفت) مستلزم درک مفهوم انتگرال مسیری (فصل دو) بوده و فصل هفت (تبدیلات فوریه) از مطالب مربوط به تابع دلتا (فصل شش) استفاده می‌کند. مطالب مربوط به توابع خاص (فصل هشت) نیاز به حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌ها (فصل سه) و سری‌های فوریه (فصل چهار) و تبدیلات فوریه (فصل هفت) دارد. به مجرد اینکه ابزاری چون تبدیل فوریه معرفی می‌شود، بلافاصله مثال‌هایی در رابطه با چگونگی کاربرد آن‌ها در حل مسائل فیزیک مطرح نموده‌ام. اگر چه فصلی مختص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وجود ندارد،

بسیاری از روش‌ها و مثال‌ها شامل حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در سراسر متن کتاب ارائه شده است. برهان‌های ریاضی در سرتاسر متن کتاب در حد مینیمم ظاهر می‌شوند، ولی بعضی از آن‌ها را می‌توانید در ضمائم بیابید.

دانشجویانی که به مسائل تئوری و محض علاقه‌مند باشند، برای مطالعه‌ی عمیق‌تر به این برهان‌ها نیاز خواهند داشت. هدف من در این کتاب نشان دادن چگونگی استفاده از ریاضیات برای اخذ نتایج مورد نیاز در حل مسائل می‌باشد (به عنوان مثال بخش‌های استفاده شده از فصل دو که مربوط به انتگرال‌گیری مسیری می‌باشد را ملاحظه نمایید). همچنین بسیاری از مثال‌های مطرح شده به کاربردها در فیزیک وابسته‌اند. زمانی که می‌خواستم متن کتاب را تألیف نمایم، با خود در جدل بودم که آیا روش‌های عددی را در حل مسائل به کار ببرم یا خیر؟ ولی بالاخره تصمیم گرفتم که کاربردهای کامپیوتر را تقریباً به طور کامل حذف نمایم (بحث مختصری راجع به حل عددی معادلات دیفرانسیل در فصل سوم و بحثی از روش‌های کامپیوتری برای حل معادلات ماتریسی در فصل یک ارائه شده است). البته در قرن بیست و یکم هر دانشجوی فیزیک نیازمند استفاده از کامپیوتر می‌باشد و اغلب مسائل در رابطه با رسم نمودارها و یا جواب‌های عددی، استفاده از کامپیوتر را توصیه می‌کنند. اما دانشجو نیازمند فهم الگوریتم‌هایی است که کامپیوتر با استفاده از آن‌ها حل مسائل را تسهیل می‌کند و لذا جهت نیل به این مقصود باید ابزارهای اساسی ریاضی را در اختیار داشته باشد. به هر حال درس کامپیوتر باید به عنوان درسی مجزا و از منبع مرتبط مخصوص خود تدریس گردد.

حل‌المسائل دانشجویان، شامل حل بیست و پنج درصد مسائل کتاب برای فروش به دانشجویان آماده است. مربعی که حول شماره‌ی مسئله در متن قرار داده شده، نشان می‌دهد که این مسئله در حل‌المسائل حل شده است. حل‌المسائل مدرسان، شامل حل تمام مسائل برای تدریس آماده است. مدرسان برای اطلاعات بیشتر در مورد تهیه‌ی این حل‌المسائل باید با ناشر تماس بگیرند.

سوزان ام. لیا

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجمین **الف**

پیشگفتار مؤلف **پ**

فهرست مطالب **چ**

۱ توصیفی از جهان **۱**

۱.۱ یک زبان همگانی و جهانی ۱

۱.۲ میدان‌های اسکالر و برداری ۲۴

۱.۳ مختصات خمیده‌ی خطی ۳۸

۱.۴ قضیه‌ی هلمهولتز ۴۸

۱.۵ فضاهای برداری ۴۹

۱.۶ ماتریس‌ها ۵۴

مسائل ۸۵

۲ متغیرهای مختلط **۹۷**

۲.۱ کلیاتی درباره‌ی اعداد ۹۷

۲.۲ توابعی با متغیرهای مختلط ۱۱۵

۲.۳ سری‌های مختلط ۱۳۱

۲.۴ اعداد مختلط و معادله‌ی لاپلاس ۱۴۴

۲.۵ قطب‌ها و صفرها ۱۵۱
۲.۶ قضیه‌ی مانده ۱۵۸
۲.۷ کاربرد قضیه‌ی مانده ۱۶۴
۲.۸ نگاشت همدیس ۱۹۲
۲.۹ تابع گاما ۱۹۹
مسائل ۲۰۴

۳ معادلات دیفرانسیل ۲۱۷
۳.۱ برخی تعاریف ۲۱۷
۳.۲ معادلات دیفرانسیل متداول در فیزیک ۲۱۸
۳.۳ جواب معادلات دیفرانسیلی خطی معمولی ۲۲۴
۳.۴ روش‌های عددی ۲۵۳
۳.۵ معادلات دیفرانسیل جزئی: تفکیک متغیرها ۲۶۸
مسائل ۲۷۲

۴ سری فوریه ۲۸۳
۴.۱ قضیه‌ی فوریه ۲۸۳
۴.۲ یافتن ضرایب ۲۸۵
۴.۳ سری‌های فوریه سینوسی وکسینوسی ۲۹۴
۴.۴ کاربرد سری فوریه در حل معالات دیفرانسیل ۳۰۱
۴.۵ همگرایی سری فوریه ۳۰۹
مسائل ۳۱۳

۵ تبدیلات لاپلاس ۳۲۳
۵.۱ تعریف تبدیل لاپلاس ۳۲۳
۵.۲ خواص اساسی تبدیل لاپلاس ۳۲۶

۵.۳ کاربرد تبدیل لاپلاس برای حل معادله‌ی دیفرانسیل ۳۲۹
۵.۴ ترفندهای مفید دیگر ۳۳۶
۵.۵ پیچش ۳۴۱
۵.۶ فرآیند وارون‌سازی کلی ۳۴۵
۵.۷ مباحث بیشتری از فیزیک ۳۵۲
مسائل ۳۵۹

۶ توابع تعمیم‌یافته در فیزیک ۳۶۹
۶.۱ تابع دلتا ۳۶۹
۶.۲ توسیع نظریه‌ی توزیع‌ها ۳۹۱
۶.۳ خواص توزیع‌ها ۳۹۵
۶.۴ دنباله‌ها و سری‌ها ۳۹۸
۶.۵ توزیع‌ها در N بعد ۴۰۲
۶.۶ توصیف کمیت‌های فیزیکی با استفاده از توابع دلتا ۴۰۴
۶.۷ تابع گرین ۴۰۶
مسائل ۴۰۷

۷ تبدیلات فوریه ۴۱۵
۷.۱ تعریف تبدیل فوریه ۴۱۵
۷.۲ مثال‌ها ۴۱۸
۷.۳ خواص تبدیل فوریه ۴۲۳
۷.۴ علّیت ۴۲۸
۷.۵ کاربرد تبدیلات فوریه در حل معادلات دیفرانسیل جزئی ۴۳۱
۷.۶ تبدیلات فوریه و طیف‌های توان ۴۳۷
۷.۷ تبدیلات سینوسی و کسینوسی ۴۴۰

مسائل ۴۴۹

۸ نظریه‌ی اشتورم لیوویل ۴۵۷

۸.۱ مسئله‌ی اشتورم لیوویل ۴۵۷

۸.۲ کاربرد نظریه اشتورم لیوویل در فیزیک ۴۶۵

۸.۳ مسائلی با تقارن کروی: همسازهای کروی ۴۷۰

۸.۴ مسائل تقارن استوانه‌ای: توابع بسل ۵۰۶

۸.۵ توابع بسل کروی ۵۳۱

۸.۶ چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک ۵۳۸

مسائل ۵۴۲

مباحث اختیاری ۵۵۷

الف تانسورها ۵۵۷

۱.الف تانسورهای دکارتی ۵۵۷

۲.الف حاصل‌ضرب‌های داخلی و خارجی ۵۶۳

۳.الف شبه تانسورها و ضرب برداری ۵۶۵

۴.الف کلیات حساب تانسوری ۵۶۸

۵.الف تانسور متریک ۵۷۳

۶.الف انقباض ۵۷۴

۷.الف بردارهای پایه و فرم‌های پایه ۵۷۶

۸.الف مشتقات ۵۷۷

مسائل ۵۸۳

ب نظریه‌ی گروه ۵۹۳

۱.ب تعریف یک گروه ۵۹۳

۲.ب مثال‌هایی از گروه‌ها ۵۹۴
۳.ب کلاس‌ها ۶۰۰
۴.ب زیرگروه‌ها ۶۰۱
۵.ب گروه‌های دوری ۶۰۳
۶.ب گروه‌های خارج‌قسمتی و ضرب مستقیم گروه‌ها ۶۰۴
۷.ب یکریختی ۶۰۵
۸.ب نمایش‌ها ۶۰۷
۹.ب مولدهای گروه‌ها ۶۲۰
۱۰.ب جبر لی ۶۲۵
مسائل ۶۲۸

پ توابع گرین **۶۳۵**

۱.پ روش تقسیم ناحیه ۶۳۷
۲.پ بسط بر حسب توابع ویژه ۶۴۱
۳.پ روش‌های تبدیل ۶۴۵
۴.پ بسط به N بعد ۶۴۶
۵.پ شرایط مرزی ناهمگن ۶۵۴
۶.پ قضیه‌ی گرین ۶۵۶
۷.پ تابع گرین برای معادله‌ی پواسون در ناحیه‌ی کران‌دار ۶۵۹
مسائل ۶۷۶

ت محاسبه‌ی تقریبی انتگرال‌ها **۶۸۳**

۱.ت روش تندترین نزول ۶۸۳
۲.ت روش فاز پایا ۶۸۸
مسائل ۶۹۰

ث حساب تغییرات ۶۹۵

۱.ث اصول انتگرال در فیزیک ۶۹۵

۲.ث معادله‌ی اویلر ۶۹۹

۳.ث تغییر وابسته به قیود ۷۰۳

۴.ث بسط به توابع با بیش از یک متغیر ۷۰۷

مسائل ۷۰۹

ضمائم ۷۱۳

یک خواصل تبدیلی حاصل‌ضرب برداری ۷۱۳

دو اثبات قضیه‌ی هلمهولتز ۷۱۵

سه اثبات به روش استقراء: فرمول کوشی ۷۱۸

چهار قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها ۷۲۰

پنج پدیده‌ی گیپز ۷۲۲

شش تبدیل لاپلاس و پیچش ۷۲۵

هفت اثبات رابطه‌ی $P_l^m(\mu) = (-۱)^m(۱-\mu^۲)^{m/۲}\frac{d^m}{d\mu^m}P_l(\mu)$ ۷۲۹

هشت اثبات رابطه‌ی $\int_۰^\infty \rho J_m(k\rho)J_m(k'\rho)d\rho = \frac{\delta(k-k')}{k}$ ۷۳۰

نه تابع خطا ۷۳۳

ده طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل جزئی ۷۳۷

یازده تابع تانژانت: بررسی تفصیلی از بسط‌های سری ۷۳۹

کتاب‌نامه ۷۵۱

نمایه ۷۵۵

فصل ۱

توصیفی از جهان

۱.۱ یک زبان همگانی و جهانی

شگفتی فیزیک در قوانین فراگیر آن است. می‌توان گفت که برای رفتار هر شیئی در هر نقطه از جهان، قوانین یکسانی قابل توصیف است. برای این قوانین نیز نیازمند یک زبان همگانی هستیم و آن زبان، ریاضی است. قوانین فیزیک با به کارگیری عبارات ریاضی نوشته شده‌اند که مستقل از چهارچوب مرجعی می‌باشند که از آن استفاده می‌کنیم. یعنی این قوانین بایستی مستقل از دستگاه مختصاتی باشند که انتخاب می‌کنیم و همچنین مستقل از هر گونه تغییر یکنواخت در چهارچوب مرجع می‌باشند. اینکه تمامی قوانین فیزیک از قانون سرعت تبعیت می‌کنند، توجیه اینشتین برای نظریه‌ی نسبیت خاص بود. اکنون با نخستین قید شروع می‌کنیم به این ترتیب که قوانین فیزیکی مستقل از دستگاه مختصات مورد استفاده بنا نهاده شده‌اند.

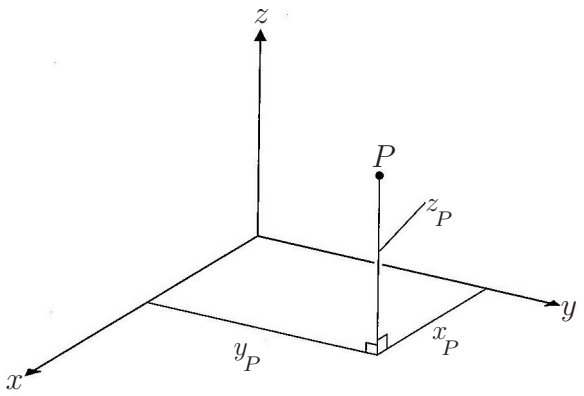
۱.۱.۱ دستگاه‌های مختصات متداول

دستگاه‌های مختصات برای توصیف مکان و جهت اشیا در فضا به کار می‌روند. دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی، سه مورد از دستگاه‌های مختصاتی هستند که دارای بیشترین

کاربرد می‌باشند.

مختصات دکارتی

دستگاه مختصات دکارتی، عبارت از دستگاه آشنای x، y و z است (شکل الف.۱.۱). محورهای مختصاتی، دو به دو بر هم عموداند و عموماً به صورت راست‌گرد انتخاب می‌شوند. به این ترتیب که اگر نقطه‌ای را به عنوان مبدأ در نظر گرفته و جهت دو محور را نیز انتخاب کنید، محور سوم توسط قانون دست راست مشخص می‌شود. فاصله‌ی ds مابین دو نقطه‌ی همجوار با مختصات

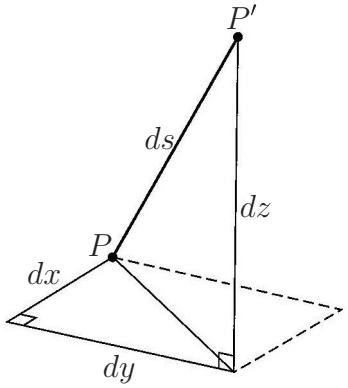


شکل الف.۱.۱. مختصات دکارتی: مکان یک نقطه توسط فواصل عمودی منتهی به سه صفحه‌ی دو به دو عمود بر هم، تعیین می‌شود.

x، y، z و $x + dx$، $y + dy$ و $z + dz$ توسط قضیه‌ی فیثاغورث به صورت زیر به دست می‌آید (شکل ب.۱.۱):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (۱.۱)$$

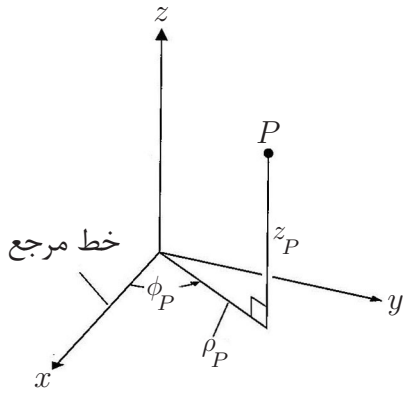
فقدان عباراتی همچون $dxdy$ از ویژگی‌های دستگاه مختصات قائم است. دستگاه دکارتی، قائم است. چون محورهایش دو به دو بر هم عموداند. تعریف دقیق‌تری از دستگاه‌های قائم را در بخش ۱.۳.۱ خواهیم دید.



شکل ب.۱.۱. فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی مجاور (طول پاره‌خط PP') توسط قضیه‌ی فیثاغورث به دست می‌آید.

مختصات استوانه‌ای

مؤلفه‌های استوانه‌ای عبارت‌اند از ρ، فاصله از محور z و ϕ، زاویه‌ی پاد ساعتگرد از یک محور مفروض (معمولاً قسمت مثبت محور xها) و بالاخره z (شکل الف.۱.۲).



شکل الف.۱.۲. مختصات استوانه‌ای: مکان یک نقطه توسط فاصله‌ی عمودی ρ از محور z و فاصله‌ی عمودی z از صفحه‌ی عمود بر محور z و یک زاویه تعیین می‌شود.

برای به دست آوردن زاویه‌ی ϕ، عمودی از نقطه‌ی P بر صفحه‌ی $z = 0$ رسم و سپس پای عمود را به مبدأ متصل می‌کنیم و زاویه‌ی بین خط منتهی به مبدأ و محور x را می‌یابیم. معمولاً

زوایا را در جهت پاد ساعتگرد از محور x اندازه‌گیری می‌کنیم. بر طبق این مختصات داریم

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \tag{۱.۲}$$

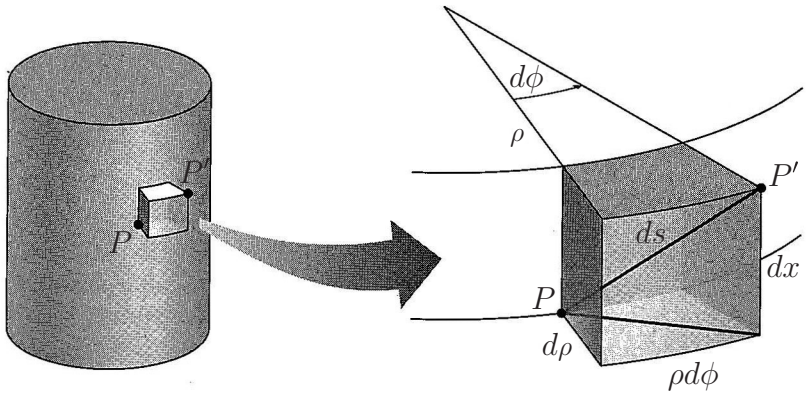
و در جهت عکس نیز نتیجه‌ی می‌گیریم که:

$$\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲}, \qquad \phi = \tan^{-۱}\frac{y}{x}. \tag{۱.۳}$$

این دستگاه مختصات نیز قائم می‌باشد چون بردارهای واحد $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (با جهت از محور z به سمت خارج و موازی با صفحه‌ی $x \circ y$)، $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (عمود بر $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و جهت آن به سوی افزایش مقدار ϕ)، و $\hat{\mathbf{z}}$ که بر هر دوی آن‌ها عمود است. اغلب دستگاه‌های مختصاتی که در فیزیک به کار می‌روند، دستگاه‌های مختصاتی قائم هستند.

فاصله‌ی ds بین دو نقطه‌ی همجوار با مختصات ρ، ϕ، z و $\rho + d\rho$، $\phi + d\phi$ و $z + dz$ با در نظر گرفتن اینکه طول قوسی از دایره‌ای به شعاع ρ و زاویه‌ی $d\phi$ به صورت $\rho d\phi$ می‌باشد (شکل ب.۱.۲) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث به صورت زیر حاصل می‌شود:

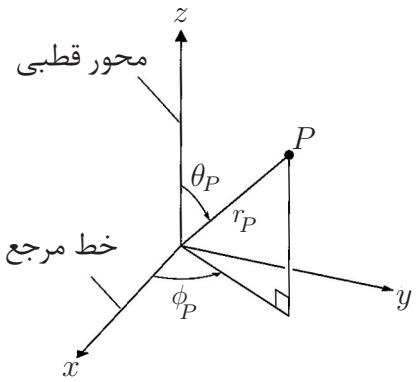
$$ds^۲ = d\rho^۲ + \rho^۲ d\phi^۲ + dz^۲. \tag{۱.۴}$$



شکل ب.۱.۲. فاصله‌ی بین دو نقطه توسط قضیه‌ی فیثاغورث محاسبه می‌شود. فاصله‌ی متناظر با نمو مختصاتی به اندازه‌ی $d\phi$ به صورت $\rho d\phi$ است.

مختصات کروی

مختصات کروی نقطه‌ی P عبارت‌اند از r، فاصله از مبدأ، θ، زاویه‌ای که از محور قطبی اندازه‌گیری می‌شود (معمولاً جهت مثبت محور x) و ϕ، زاویه در جهت پاد ساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x، (شکل الف.۱.۳). بر حسب مختصات دکارتی داریم:



شکل الف.۱.۳. مختصات کروی: مکان یک نقطه توسط فاصله از مبدأ و دو زاویه تعیین می‌شود. زاویه‌ی ϕ مشابه مختصات استوانه‌ای است. زاویه‌ی قطبی θ از محور قطبی z تا بردار مکان نقطه اندازه‌گیری می‌شود.

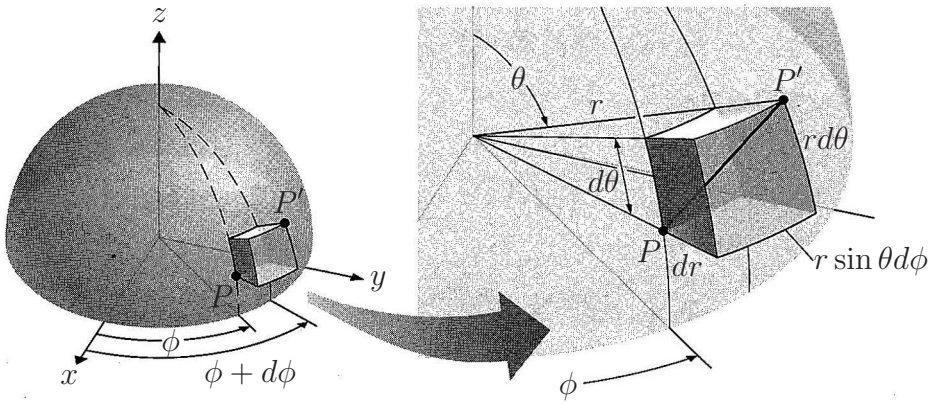
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{z}{r}, \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{۱.۵}$$

و

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta \tag{۱.۶}$$

با افزایش زاویه‌ی ϕ به مقدار $d\phi$، نقطه‌ی P حول دایره‌ای به شعاع $r\sin\theta$ و به اندازه‌ی $r\sin\theta d\phi$ جابجا می‌شود (شکل ب.۱.۳) و بنابراین:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{۱.۷}$$



شکل ب.۱.۳. فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی همجوار توسط قضیه‌ی قیثاغورث حاصل می‌شود. همچنین فواصل متناظر با نموهای مختصاتی $d\theta$ و $d\phi$ عبارت‌اند از $rd\theta$ و $r\sin\theta d\phi$.

۱.۱.۲ نمایش قوانین فیزیکی

قوانین فیزیکی به شکل معادلاتی که شامل کمیت‌های ریاضی‌اند نمایش داده می‌شوند و این کمیت‌ها مستقل از چهارچوب مرجع یا مختصات انتخاب شده، جهت توصیفشان، می‌باشند. هر قانون فیزیکی را می‌توان به شکلی نوشت که مستقل از مختصات باشد. به طور مثال، می‌توان قانون دوم نیوتن را بدون اشاره به مختصات خاصی به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad (۱.۸)$$

کمیت‌های موجود در این معادله عبارت‌اند از اسکالرها، بردارها و عملگرهای دیفرانسیلی. هیچ مختصاتی به ظاهر در این معادله دیده نمی‌شود (در نظریه‌ی نسبیت خاص، نیازمند سه بعد مستقل از هم به عنوان چهارچوب مرجع لختی و زمان t به عنوان بعد چهارم هستیم. پس ناچاریم قانون دوم نیوتن را به صورتی متفاوت بنویسیم. اینک استقلال مختصاتی و سه مختص فضایی را در نظر می‌گیریم).